

『離散構造』4章(関係)の演習問題の解答例

出題: 2009.1.30

期限: 2009.2.6

問題 1 (2 項関係) 集合 $A = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}$ 上の 2 項関係として以下の R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 を考える。

$$\begin{aligned}(aR_1b) &\Leftrightarrow (a < b) & (aR_4b) &\Leftrightarrow (3 \mid (a - b)) \\ (aR_2b) &\Leftrightarrow (a \mid b) & (aR_5b) &\Leftrightarrow (a = 2b) \\ (aR_3b) &\Leftrightarrow (|a - b| < 3)\end{aligned}$$

ただし $a \mid b$ は「 a が b の約数である」ことを表す。

(a) R_2 を集合として具体的に書き下しなさい。

R_2 は $\langle a, b \rangle$ (ただし a は b の約数で, 1 以上 10 以下) の形の要素からなる集合であるので, 以下の通り:

$$\begin{aligned}R_2 = \{ &\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 1, 7 \rangle, \langle 1, 8 \rangle, \langle 1, 9 \rangle, \langle 1, 10 \rangle, \\ &\langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 2, 10 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 3, 9 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 8 \rangle, \\ &\langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 10 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \langle 9, 9 \rangle, \langle 10, 10 \rangle\}\end{aligned}$$

(b) 同様に, R_5 を集合として具体的に書き下しなさい。

$$R_5 = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 6, 3 \rangle, \langle 8, 4 \rangle, \langle 10, 5 \rangle\}$$

問題 2 (2 項関係の性質)

(a) R_i のうち反射律を満たすものを全てあげなさい。

答: R_2, R_3, R_4 .

なぜなら, まず, $(aR_2a) \Leftrightarrow (a \mid a)$ であり $a \mid a$ はいつでも成立するから R_2 は反射的である. $(aR_3a) \Leftrightarrow |a - a| < 3$ であるが, 後者もいつでも成立する. $(aR_4a) \Leftrightarrow (3 \mid (a - a))$ であるが, $a - a = 0$ は, 3 の倍数なので成立する.

一方, R_1, R_5 は反射的でない. なぜなら, $2R_12 \Leftrightarrow 2 < 2$ となり不成立. また, $2R_52 \Leftrightarrow 2 = 4$ となり, 不成立.

(b) R_i のうち推移律を満たすものを全てあげなさい。

答: R_1, R_2, R_4 .

なぜなら, まず, $(aR_1b) \wedge (bR_1c)$ とすると, $a < b < c$ となるので, aR_1c が導けるので, R_1 は推移的. 次に, $(aR_2b) \wedge (bR_2c)$ とすると, $a \mid b$ かつ $b \mid c$ となるが, これらより $a \mid c$ が導けるので, aR_2c となり, R_2 は推移的である. さらに, $(aR_4b) \wedge (bR_4c)$ とすると, $3 \mid (a - b)$ かつ $3 \mid (b - c)$ である. つまり, ある整数 d, e があって, $a - b = 3d$ かつ $b - c = 3e$ である. 両辺を足して, $a - c = 3(d + e)$ となるので, $3 \mid (a - c)$ となり, よって, aR_4c である.

一方, R_3 は推移的でない. なぜなら, $0R_32$ かつ $2R_34$ であるが, $0R_34$ でないから. また, R_5 も推移的でない. なぜなら, $4R_52$ かつ $2R_51$ であるが, $4R_51$ でないから.

(c) R_1 は順序か。

答: NO. R_1 は上で見たように反射的でないので、順序ではない。

(d) R_2 は順序か。

答: YES. 反射的かつ推移的であることは、既に上で見た。残るのは、反対称的かどうかだが、 aR_2b かつ bR_2a と仮定すると、 $a \mid b$ かつ $b \mid a$ ということであり、これらより、 $a = b$ または $a = -b$ となる。しかし、この問題で a, b の動く範囲は正整数なので、 $a = b$ である。よって、 R_2 は反対称的であり、順序となる。

(e) R_3 は同値関係か。

答: NO. 上で見たように、推移的でないので、同値関係ではない。

(f) R_4 は同値関係か。

答: YES. 反射的かつ推移的であることは、既に上で見た。残るのは対称律であるが、 aR_4b であれば、 $3 \mid (a - b)$ であり、したがって $3 \mid (b - a)$ となり（「約数である」という関係は、負の整数上にも適用されることに注意）、結局 bR_4a である。よって、対称律を満たす。

(g) $R_1 \cup R_2$ は $\mathcal{N}$ 上の二項関係である。これは順序か。

答: YES. まず $R_1 \cup R_2$ という二項関係がなんであるかを考える。

$$a(R_1 \cup R_2)b \Leftrightarrow ((a < b) \vee (a \mid b))$$

ということであるが、右辺はよく考えると、 $a \leq b$ と同値である。（ $a \mid b$ という関係は、 $a = b$ の場合以外は常に $a < b$ であるので、 $a < b$ の方に含まれる。）

よって $a \leq b$ で規定される二項関係が順序かどうかであるが、これは授業でもやったように、順序である。（反射律、反対称律、推移律を満たすことの論証はここでは省略。）

問題 3 (関係の合成)

上記の R_5 に対して、以下のように、 S_i を定義する。

$$S_1 = R_5$$

$$S_{i+1} = S_i \circ R_5 \quad \text{if } i > 0$$

- S_2, S_3, S_4 を集合として具体的に書き下しなさい。

まず、 $R_5 = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 6, 3 \rangle, \langle 8, 4 \rangle, \langle 10, 5 \rangle\}$ であることを思いだす。その上で、以下のように計算できる。

$$S_2 = R_5 \circ R_5 = \{\langle 4, 1 \rangle, \langle 8, 2 \rangle\}$$

$$S_3 = S_2 \circ R_5 = \{\langle 8, 1 \rangle\}$$

$$S_4 = S_3 \circ R_5 = \{\}$$

S_i は、 $R = 5$ を i 回繰返して到達できる関係を表す。

- $i = 2, 3, 4$ に対して S_i が推移律を満たすか調べなさい。

答: S_2, S_3, S_4 とともに推移律を満たす。というのは、どの二項関係も、 aS_ib かつ bS_ic となる a, b, c が存在しないので、推移律の条件が（自明に）成立してしまうからである。（ $A \Rightarrow B$ は A が偽のとき、全体としては、真であることを思いだすこと。）

（この小問は、出題ミスでつまらないケースになってしまった。）

- (発展課題) A 上の二項関係 T で、 $R_5 \subset T$ となるものを考える。 T が推移律を満たせば、 $S_i \subset T$ であることを示しなさい。

答. まず、推移律を満たす関係 T は、 $T \circ T \subset T$ となることに注意する。(なぜなら、 $a(T \circ T)c$ と仮定すると、合成関係の定義より、ある b があって、 aTb かつ bTc となる。しかし、 T は推移的なので、これらが成立するとき aTc である。よって、 $T \circ T \subset T$ である。)

これを使って、以下のように導ける。

- (a) 問題の条件より、 $R_5 \subset T$ である。
- (b) よって、 $(R_5 \circ R_5) \subset (T \circ R_5)$ である。
- (c) 一方、 $(T \circ R_5) \subset (T \circ T)$ でもある。
- (d) また、 T は推移的なので、 $(T \circ T) \subset T$ である。
- (e) これらを合わせると、 $(R_5 \circ R_5) \subset T$ となる。

よって、 $S_2 \subset T$ である。同様の推論を繰返すと、 $S_i \subset T$ となる。

(注. この問題の意図としては、上記のような S_i を $i = 1, 2, 3, \dots$ と繰返し生成していくと、 $\cup S_i$ が、「 R_5 を含んで、推移律を満たす二項関係」となる、ということがある。実は、このように作って、 $\cup S_i$ は、そのような二項関係のうち最小のものであることがわかる。これを推移閉包 (transitive closure) という。たとえば「ウェブページ A からウェブページ B へのリンクがある」という二項関係は推移的ではないが、その推移閉包である「ウェブページ A からウェブページ B へ、リンクを有限回たどって到達できる」という二項関係は推移的である。)

- (発展課題)

W を英単語の集合とする。 W 上の全順序には、どのようなものがあるか、考察しなさい。

答えの 1 つ. 辞書式順序については、テキストに記載したので参考にされたい。