『離散構造』 3 章 (関数) の演習問題 (亀山)
出題: 2008.12.26
期限: 2009.1.9 の授業開始時刻

問題 1 (関数の定義と単射・全射)

$\mathcal{R}$ を実数の集合 (すべての実数からなる集合) とする。

以下に示す対応付けは、$\mathcal{R}$ から $\mathcal{R}$ への関数となるか、また、部分関数となるか答えよ。さらに、関数である場合、単射であるか、また、全射であるか、示せ。

(a) $x \in \mathcal{R}$ に対して $x^3 - x$ を対応付ける。

(b) $x \in \mathcal{R}$ に対して $x = y^3$ となる y を対応付ける。

(c) $x \in \mathcal{R}$ に対して $\sqrt{x^3}$ を対応付ける。

(d) $x \in \mathcal{R}$ に対して $x = \tan y$ となる y を対応付ける。

問題 2 (像、合成、全射、単射)

$f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ および $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ となる関数 f と g を $f(x) = \sin x,\ g(x) = x^3 - 1$ で定義する．また、$A = \{x \in \mathcal{R} \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ とする。

(a) f による A の像 $f(A)$ と，g による A の像 $g(A)$ を求めよ.

(b) 合成関数 $f \circ g$ と $g \circ f$ は定義されるか、また、定義される場合、それらを具体的に求めよ.

(c) 集合 A を $\mathcal{R}$ の部分集合とする．$f : \mathcal{R} \to A$ が全射となる A を 1 つ求めよ.

(d) 集合 B を $\mathcal{R}$ の部分集合とする．$g : B \to \mathcal{R}$ が単射となる B を 1 つ求めよ.

(e) $f \circ h = h \circ g$ となる関数 $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ を 1 つ求めよ。

問題 3 集合 $A = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x \leq 12\}$ と、整数 i に対して、$g_i : A \to A$ となる関数と、$h_i : A \to A$ となる関数とを、$g_i(x) = (x + i) \ \mathtt{mod}\ 13$ で定義する。$h_i(x) = (x \times i) \ \mathtt{mod}\ 13$ で定義する。ただし、mod は整数上の割り算を行い、余りを返す関数とする。

(a) g_3 が関数になっていることを確かめよ。g_3 は全射か、また、単射か。

(b) h_5 が関数になっていることを確かめよ。h_5 は全射か、また、単射か。

(c) $h_i = h_j$ となるのは、i と j がどのような条件を満たすときか。

(d) h_i が h_j の逆関数となるのは、i と j がどのような条件を満たすときか。

(e) $g_i = h_j$ となることがあるか。

問題 4 f と g が単射で、合成関数 $g \circ f$ が定義されるとき、$g \circ f$ も単射であることを証明せよ。