

『離散構造』 2 章 (集合) の演習問題 (亀山)

出題: 2008.12.19

演習: 2008.12.26

問題 1 (集合の表現)

以下の集合を $\{x \in A \mid P(x)\}$ の形で記述せよ。(ただし, A は集合, $P(x)$ は命題である.)

- (a) x の約数の総和が $2x$ となる自然数 x を全て集めた集合。(注意。「。。となるものを全て集めた集合」のことを、簡潔に「。。。の集合」と言う。)
- (b) x^4 を 5 で割ると 1 余るような自然数 x の集合。
- (c) 2 の倍数であって、3 の倍数でない自然数の集合。
- (d) 整数を係数とする 2 次方程式の根となる実数の集合。
- (e) 有理数を係数とする 2 次方程式の根となる実数の集合。
- (f) 自然数の集合 $\mathcal{N}$ の部分集合のうち、要素数が 2 である集合を全て集めた集合。(たとえば、 $\{1, 2\}$ は、この集合の要素である。)

問題 2 (集合の演算)

以下の各項目における集合たちが、互いに等しいか考察せよ。(等しい場合はその根拠を述べ、等しくない場合は反例をあげよ。)

- (a) 集合 $(A \cup B) - B$, 集合 $(A \cup B) - A$, 集合 $A - B$.
- (b) 集合 $(A \cap B) \cup C$, 集合 $(A \cup C) \cap B$, 集合 $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.
- (c) 集合 $2^{A \cap B}$, 集合 $2^A \cap 2^B$.
- (d) 集合 $A \times B$, 集合 $B \times A$.
- (e) 集合 $\{\}$, 集合 $\{\{\}\}$, 集合 $2^{\{\}}$,

問題 3 (有限集合の要素数)

A が有限集合のとき、 $\#A$ は A の要素数をあらわす。(なお、 A の要素数を $|A|$ と書くこともある。) このとき、 $\#(A \cup B)$ を、 $\#A$ 、 $\#B$ 、 $\#(A \cap B)$ の式として表現せよ。

同様に、 $\#(A \cup B \cup C)$ を、 $\#A$ 、 $\#B$ 、 $\#C$ 、 $\#(A \cap B)$ 、 $\#(B \cap C)$ 、 $\#(C \cap A)$ 、 $\#(A \cap B \cap C)$ の式として表現せよ。

問題 4 (集合に関する推論)

任意の集合 A, B, C に対して以下の命題が成立するかどうか調べ、証明あるいは反証せよ。

- (a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
- (b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.