

『離散構造』 2 章 (集合)

演習問題の解答

亀山

問題 1 (集合の表現)

以下の集合を $\{x \in A \mid P(x)\}$ の形で記述せよ. (ただし, A は集合, $P(x)$ は命題である.)

- (a) x の約数の総和が $2x$ となる自然数 x を全て集めた集合. (注意. 「 $\circ$ 。となるものを全て集めた集合」のことを、簡潔に「 $\circ$ 。。の集合」と言う.)

$$\{x \in \mathcal{N} \mid \sum_{y|x} y\}$$

- (b) x^4 を 5 で割ると 1 余るような自然数 x の集合.

答: $a \bmod b$ で, a を b で割った余りを表すことにすると, この集合は, 以下のように表現できる.

$$\{x \in \mathcal{N} \mid (x^4 \bmod 5) = 1\}$$

- (c) 2 の倍数であって, 3 の倍数でない自然数の集合.

答: $\{x \in \mathcal{N} \mid (2|x) \wedge \neg(3|x)\}$.

- (d) 整数を係数とする 2 次方程式の根となる実数の集合.

答: $\{x \in \mathcal{R} \mid (a \in \mathcal{N}) \wedge (b \in \mathcal{N}) \wedge (c \in \mathcal{N}) \wedge (ax^2 + bx + c = 0)\}$.

これでよいが, より厳密に書くと, 「ある a, b, c に対して…」ということを明確にした以下の表現となる.

$\{x \in \mathcal{R} \mid \exists a. \exists b. \exists c. ((a \in \mathcal{N}) \wedge (b \in \mathcal{N}) \wedge (c \in \mathcal{N}) \wedge (ax^2 + bx + c = 0))\}$.

- (e) 有理数を係数とする 2 次方程式の根となる実数の集合.

答: $\{x \in \mathcal{R} \mid (a \in \mathcal{Q}) \wedge (b \in \mathcal{Q}) \wedge (c \in \mathcal{Q}) \wedge (ax^2 + bx + c = 0)\}$.

- (f) 自然数の集合 $\mathcal{N}$ の部分集合のうち, 要素数が 2 である集合を全て集めた集合. (たとえば, $\{1, 2\}$ は, この集合の要素である.)

答: $\{x \in 2^{\mathcal{N}} \mid \#x = 2\}$.

ただし, 有限集合 x の要素数を $\#x$ と表現した. この表現を使わないでも, 上記の集合を表現することは可能であるが, 以下のように, かなり複雑になる.

答: $\{x \in 2^{\mathcal{N}} \mid \exists a \in \mathcal{N}. \exists b \in \mathcal{N}. (a \in x \wedge b \in x \wedge a \neq b \wedge \forall y. (y \in x \Rightarrow (y = a) \vee (y = b)))\}$.

問題 2 (集合の演算)

以下の各項目における集合たちが, 互いに等しいか考察せよ. (等しい場合はその根拠を述べ, 等しくない場合は反例をあげよ.)

- (a) 集合 $(A \cup B) - B$, 集合 $(A \cup B) - A$, 集合 $A - B$.

答. $(A \cup B) - B = A - B$ であるが, $(A \cup B) - A$ は必ずしも一致しない.

反例の 1 つ: $A = \{\}$, $B = \{1\}$ とすれば, $(A \cup B) - B = A - B = \{\}$ であるが, $(A \cup B) - A = \{1\}$ となる.

(b) 集合 $(A \cap B) \cup C$, 集合 $(A \cup C) \cap B$, 集合 $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

答. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ であるが、 $(A \cup C) \cap B$ は必ずしも一致しない。

反例の 1 つ: $A = B = \{\}$, $C = \{1\}$ とすれば、 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = \{1\}$ であるが、 $(A \cup C) \cap B = \{\}$ となる。

(c) 集合 $2^{A \cap B}$, 集合 $2^A \cap 2^B$.

答. 一致する。(根拠: 集合 $2^{A \cap B}$ の要素 x は、 $A \cap B$ の部分集合であるので、 A の部分集合で、かつ、 B の部分集合である。従って、 $x \in 2^A$ かつ $x \in 2^B$ である。逆に、集合 $2^A \cap 2^B$ の要素 y は、 2^A の要素かつ 2^B の要素であるので、結局、 y は A の部分集合で、 B の部分集合である。よって、 $A \cap B$ の部分集合となり、 $y \in 2^{A \cap B}$ である。)

(d) 集合 $A \times B$, 集合 $B \times A$.

答. 必ずしも一致しない。反例の 1 つ: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ とすれば、 $A \times B = \{\langle 1, 2 \rangle\}$ で、 $B \times A = \{\langle 2, 1 \rangle\}$ となる。組 $\langle 1, 2 \rangle$ と $\langle 2, 1 \rangle$ は (順番が異なるので) 異なる。従って、 $A \times B \neq B \times A$ である。

(e) 集合 $\{\}$, 集合 $\{\{\}\}$, 集合 $2^{\{\}}$,

答. $\{\{\}\} = 2^{\{\}}$ であり、 $\{\}$ とは異なる。

問題 3 (有限集合の要素数)

A が有限集合のとき、 $\#A$ は A の要素数をあらわす。(なお、 A の要素数を $|A|$ と書くこともある。) このとき、 $\#(A \cup B)$ を、 $\#A$ 、 $\#B$ 、 $\#(A \cap B)$ の式として表現せよ。

答. $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

同様に、 $\#(A \cup B \cup C)$ を、 $\#A$ 、 $\#B$ 、 $\#C$ 、 $\#(A \cap B)$ 、 $\#(B \cap C)$ 、 $\#(C \cap A)$ 、 $\#(A \cap B \cap C)$ の式として表現せよ。

答. $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(C \cap A) + \#(A \cap B \cap C)$.

問題 4 (集合に関する推論)

任意の集合 A, B, C に対して以下の命題が成立するかどうか調べ、証明あるいは反証せよ。

1. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

答. これは、成立するので証明する。

1-1. $(A \cap B) \times C \subset (A \times C) \cap (B \times C)$ を証明する。

$x \in (A \cap B) \times C$ と仮定すると、ある y, z があって、 $x = \langle y, z \rangle$ で、 $y \in (A \cap B)$ かつ $z \in C$ である。よって、 $y \in A$ かつ $y \in B$ である。

これらから、 $\langle y, z \rangle \in A \times C$ であり、かつ、 $\langle y, z \rangle \in B \times C$ である。よって、 $x = \langle y, z \rangle \in (A \times C) \cap (B \times C)$ である。

1-2. $(A \times C) \cap (B \times C) \subset (A \cap B) \times C$ を証明する。

$x \in (A \times C) \cap (B \times C)$ と仮定すると、 $x \in A \times C$ かつ $x \in B \times C$ である。よって、ある y, z があって $x = \langle y, z \rangle$ で、 $y \in A$ かつ $z \in C$ となる。また、 $y \in B$ かつ $z \in C$ である。

これらから、 $y \in A \cap B$ であり、 $\langle y, z \rangle \in (A \cap B) \times C$ となる。

以上の 1-1, 1-2 から、 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ が証明できた。

2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

答. これも成立する。証明は上記 1 のケースと同様なので省略する。