

『離散構造』 1章の例題

平成 20 年 11 月 21 日

問 1 (必須問題)

例題にならって、次の文を論理式 (命題) で表現せよ。ただし、基本命題としてはなるべく詳細なものを選択し、何を基本命題にとって表現したかを明示せよ。

- (a) 例題「雨が降っていたら、A 君は傘を持っていく。」

基本命題として、 P = 「雨が降っている」、 Q = 「A 君は傘を持っていく」とすれば、「 $P \Rightarrow Q$ 」という命題で表現することができる。

もし、 R = 「雨が降っていたら A 君は傘を持っていく。」とすれば、「 R 」という命題になってしまうが、基本命題はなるべく詳細なものを取ることにするので、このような表現はしないものとする。

- (b) 例題「 x は平方数である (ある整数の 2 乗になっている)。」

この問題は、「ある整数」を y とすると、 $\text{int}(y) \wedge x = y^2$ と書けばよさそうである。(ここで、「 y は整数である」という基本命題を「 $\text{int}(y)$ 」と略記した。) しかし、これでは x だけでなく、 y にも依存する命題となってしまう。問題文は x のみについて書いてあるので、これではよくない。正解は、「 $\exists y. (\text{int}(y) \wedge x = y^2)$ 」である。このように書けば、「ある y について ... が成立する」という命題になり、 y には依存しない。

この場合、基本命題としては $\text{int}(y)$ = 「 y は整数である」と、 $x = y^2$ = 「 x は y^2 と等しい」の 2 つを使った。

- (c) 「A 君は怒られなければ勉強しない。」と「A 君が勉強したら怒られた。」
(d) 「授業が面白いが、単位が欲しければ、授業に出席する。」
(e) 「筑波大学の 1 年生の中には、誕生日が同じ人が 1 組以上いる。」
(f) 「 x は y と z の最小公倍数である」
(g) 「 x は 100 以下の自然数の中で、最も多くの約数を持つ数である。」

問 11 (必須)

真理値表に関する以下の問いに答えよ。

- (a) 命題 $A \wedge B$ の否定の真理値表と、命題 $\neg A \vee \neg B$ の真理値表が等しくなることを確認せよ。このことを通して、命題「 x と y が奇数である」を否定すると、命題「 x が奇数でないか、または、 y が奇数でない」となることを確認せよ。
- (b) 命題 $A \Leftrightarrow B$ は、 A と B の真偽の全ての組み合わせに対して、真偽の値が定義されている。しかし実際には、具体的に取り扱う A と B により、 A と B の真偽の全ての組み合わせが発生するとは限らない。特殊な例として、 A, B が共に真、もしくは、共に偽となる場合のみが組合せとして発生する場合が考えられ、この場合、特に、命題 A と命題 B は同値であるという。
- 命題 A, B をそれぞれ $(C \Rightarrow D)$, $(\neg D \Rightarrow \neg C)$ とおいたときの真理値表を書くことにより、この命題 A と命題 B は同値となることを確かめよ。また、同時に、この命題 A, B について命題 $A \Leftrightarrow B$ を求めると、常に真となることも確かめよ。なお、一般に、常に真となる命題は恒真式 (トートロジー) と呼ばれる。
- (c) 命題 $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ の真理値表を作成し、恒真式となるか否かを確認せよ。

問 21 (必須)

以下の文を論理式 (命題) で表現した上で, 証明もしくは反証せよ. ただし, 反証とは正しくないことを証明することである.

- (a) 連続した 3 つの自然数をかけた数は, 6 で割り切れる.
- (b) 3 以上の素数 p に対して, $p^2 + 2$ と $p^2 - 2$ の少なくとも一方は素数である.
- (c) 7 で割り切れない自然数の 6 乗は, 7 で割ると 1 余る.

問 31 (必須)

以下の論理式が常に正しいかどうか, 理由をつけて述べよ.

$(\exists y. \forall x. P(x, y)) \Rightarrow (\forall x. \exists y. P(x, y))$ [ヒント: x, y を自然数を表す変数とし, $P(x, y)$ を「 $x = y$ 」や「 $x < y$ 」などとしてみるとよい.]