

今回の演習問題は、気合いをいれて作り過ぎてしまったことと、説明をきちんとしていない部分があったため、難し過ぎたかもしれない。

特に「問1」の3問目以降は $\forall$ や $\exists$ を駆使しないと書けない問題が多く、それらについては、現段階で解けなくても気にしないでよい。

問1

- (a) 「 A であるためには、 B であることが必要」という文は、最初は、「 $B \Rightarrow A$ 」と定式化できるとしてしまいうのであるが、それは間違いである。 $B \Rightarrow A$ は、「 B であれば (必ず) A である」という意味なので、「 B という条件は、 A であるための十分条件である (B でありさえすれば、 A である。ただし、 B でなくても A である場合があり得る。)」ということになる。これは、「必要」条件とは異なる。必要条件の定式化は、正しくは、 $A \Rightarrow B$ とすべきである。

従って、この問題の正解は、 $P \Rightarrow (Q \wedge R)$ となる。

[注. この命題を日本語にもう一度翻訳すると、却って訳がわからなくなるかもしれない。そのまま翻訳すると、「単位を取れば、授業へ出席して試験で良い成績を取る」という文になるが、これは、日本語としては、時間的な順序がはっきりかえていておかしい感じである。この違和感の原因は、日本語では「。。。すれば。。。」というのは、時間の順序 (あるいは、因果関係など) を意味することがあるのに、論理記号の $\Rightarrow$ は、時間には一切関係ないことである。したがって、正確に翻訳すると、「単位を取ることができたなら、授業へ出席して試験で良い成績を取たはずである」という意味になる。これなら、この文が正しそうだ、と納得できよう。なお、この「離散構造」の授業では、自然言語の解釈は扱わない。]

- (b) これは簡単に、 $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ と表現できる。
- (c) $a|b$ という命題は、「例題」に書いたように、「 a が b を割り切る (a が b の約数である、あるいは、 b が a の倍数である)」ことを意味する命題である。

したがって、問題文を、 $(y|x) \wedge (z|x)$ と定式化したくなるが、これは間違いである。なぜなら、これは、「 x は y と z の倍数 (公倍数) である」というだけの意味であるので、「最小の公倍数」ということを意味していないからである。すなわち、「どんな公倍数をもってきても x 以上である」ということを追加すればよい。正解は、

$$(y|x) \wedge (z|x) \wedge \forall w.(((w|y) \wedge (w|z)) \Rightarrow (x \leq w))$$

となる。やや複雑に見えるかもしれないが、落ち着いて考えれば、意味が理解できよう。

なお、問題文では基本命題として $a|b$ と $a = b$ を用いることとしていて、 $x \leq w$ がはいっていない。この命題は、 $\exists u.(w = x + u)$ として表現可能である。これが $x \leq w$ を表すことを各自確かめてほしい。(ちなみに、大学以降では、「自然数」といえば 0 以上の整数をあらわす。0 も自然数である。)

- (d) x が素数というのは、 $1 < w < x$ となる自然数 w のうち、どれをもってきても x の約数とはならない、ということである。そこで、

$$x > 1 \wedge \forall w.(1 < w < x \Rightarrow \neg(w|x))$$

と書けばよい。この命題にも $1 < w$ などの式があらわれるが、これも $\exists u.(u + 2 = w)$ として表現できる。

- (e) 「10 個以上の約数」はあまりにも大変だったので、「3 個以上の約数」という風に勝手に問題を変更して解答する。(「10」というのは問題の不備です。私自身も 10 だとするととても書けません。本当に書き下した人は、すいません。)

まず、 $P(x)$ を以下の論理式とする。

$$x \geq 1 \wedge \exists w_1. \exists w_2. \exists w_3. ((w_1|x) \wedge (w_2|x) \wedge (w_3|x) \wedge \neg(w_1 = w_2) \wedge \neg(w_2 = w_3) \wedge \neg(w_3 = w_1))$$

長いのであるが、それほど難しい意味をもつ命題ではなく、要するに「 x は 1 以上であり、かつ、相異なる 3 つの約数が存在する」という意味である。

このとき、問題の文は、 $P(x) \wedge \forall w. (P(w) \Rightarrow x \leq w)$ と表すことができる。これは「 x は $P(w)$ が成立するような w の中で最小である」という意味である。

[注. なお、「3 つの数 w_1, w_2, w_3 が相異なる」ということを意味する命題を書くために、 $\neg(w_1 = w_2) \wedge \neg(w_2 = w_3) \wedge \neg(w_3 = w_1)$ という風に 3 つの等式を使っているのであるが、これが 10 個の数だとすると、 $10 \cdot 9/2 = 45$ 個の等式が必要になり、とても書ききれない。(大変失礼しました)。]

- (f) $(2^x < x^2) \wedge \forall w. (2^w < w^2 \Rightarrow x = w)$.

この命題の後半は、「 $2^w < w^2$ が成立する w は x と同じものしかない」ということを意味しているので、結局、その性質を満たす自然数は、 x しかないことを意味している。

問 2 真理値表は省略する。

この操作を繰り返すと、トップレベルには $\wedge$ があり、次のレベルに $\vee$ があり、最後に $\neg$ がある、という形式の命題が得られる。

$$\begin{aligned} & (L_1^1 \vee L_2^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \\ & \wedge (L_1^2 \vee L_2^2 \vee \dots \vee L_{n_1}^2) \\ & \wedge \dots \\ & \wedge (L_1^k \vee L_2^k \vee \dots \vee L_{n_k}^k) \end{aligned}$$

ただし、 L_i^j は、基本命題か、あるいは、基本命題に $\neg$ をつけたものである。

これを論理積標準形 (Conjunctive Normal Form) という。この標準形は、命題を機械的に処理するときに非常に便利な形式である。

たとえば、 $A \Rightarrow (B \vee \neg C)$ という命題に、上記の変形操作を繰り返し適用すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} A & \Rightarrow (B \wedge (\neg C)) \\ (\neg A) & \vee (B \wedge (\neg C)) & \text{(a) を適用} \\ ((\neg A) \vee B) & \wedge ((\neg A) \vee (\neg C)) & \text{(f) を適用} \end{aligned}$$

これを見ると、 $\wedge$ が一番外側 (トップレベル) に来て、その次に $\vee$ が来て、一番内側に $\neg$ が来ている、という様子がよくわかるであろう。

問 3

N 個の論理記号をもつ命題の部分論理式の総数は、最大 $2N + 1$ 個である (short quiz 参照のこと)。従って、真理値表の「幅」(列の数) は、最大 $2N + 1$ である。

一方、真理値表の「高さ」(行の数)は、 2^M である (M 個の基本命題が、それぞれ T か F という値を取る組み合わせなので)。

以上をかけ合わせて、真理値表のサイズ (T と F の総数) は、最大 $2^M(2N+1)$ である。

(なお、実際には、もっと小さくて済む。 $2N+1$ 個の部分論理式のうち、 $N+1$ 個は、基本命題であるので、実際には重複している基本命題を 1 回だけ書くことにすると M 列で済むはずである。従って、「幅」は最大 $N+M$ であり、真理値表のサイズは最大、 $2^M(N+M)$ となる。ただ、この問題では、そこまで精密にやる必要はない。)

問 4

(a) A が T のとき、 $\otimes(A, T, F)$ は F となり、 A が F のとき、 $\otimes(A, T, F)$ は T となるので、たしかに $\neg A$ と同値である。

(b) 真理値表を書けばよい。

A	B	$\otimes(A, B, T)$	$\otimes(\otimes(A, B, T), T, F)$	$A \vee B$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	F

(c) $\neg$ と $\vee$ を既に作ってあるので、 $A \wedge B$ が $\neg((\neg A) \vee (\neg B))$ と同値なことを使えば、簡単に解ける。

つまり、 $A \wedge B$ を

$$\otimes(\otimes(\otimes(\otimes(A, T, F), \otimes(B, T, F), T), T, F), T, F)$$

とすればよい。

実際には、もっと簡単な表現もある。

$$\otimes(\otimes(a, T, F), \otimes(b, T, F), T)$$

これが、 $\wedge$ になることは、各自真理値表を書いて確認してほしい。なお、これら以外の解もある。

(演習終了後に追加： 演習で解答してくれた人が、私の解より短いものを書いてくれたので、メモ)

$$\otimes(\otimes(a, b, F), F, T)$$