束に値をとる可能性測度について
Lattice-valued possibility measures

筑波大学　電子・情報工学系
宮本　定明
Sadaaki Miyamoto
Institute of Information Sciences and Electronics
University of Tsukuba, Ibaraki 305, Japan
email:miyamoto@esys.tsukuba.ac.jp

July 2, 1996

ISE-TR-96-135

束に値をとる可能性測度について
Lattice-valued possibility measures

筑波大学　電子・情報工学系
宮本　定明
Sadaaki Miyamoto
Institute of Information Sciences and Electronics
University of Tsukuba, Ibaraki 305, Japan

Abstract

A new definition of possibility degree taking values in a poset or lattice is proposed on the basis of a multimodal logic system. A poset of which elements are assumed to be the indices to possibility and necessity operators of modal logic. Kripke semantics using a family of relations and corresponding axioms are investigated. Completeness between the formal system and the Kripke models is proved. Possibility degree is defined as the supremum of elements in a complete lattice, assuming that the poset has the lattice structure. Traditional possibility theory is considered as a special case in which the lattice is the unit interval. Another example of the lattice is a set of linguistic terms with AND, OR, and NOT connectives. Thus, the present approach suggests the use of linguistic expressions as the possibility degree.

1　はじめに

ファジィ理論における可能性理論 [1, 2] は不確定性を扱う数理モデルとして確率論に代わるものとして有力視され、様々に研究されてきている。また、可能性理論は証拠理論 [3] と深い関係にあることが知られている [2]。最近、村井ら [4] は様相論理と証拠理論との関連を考察し、様々な体系とモデルとの対応を示している。

このことは、可能性理論と様相論理とが深い関わりをもっていることを示唆している。そこで、本稿では、様相記号に添字が施される多重様相論理 (multimodal logic) の体系とモデルを考え、これから可能性を定義してみよう。これを試みる際、従来の可能性理論の枠を一般化し、束に値をとる可能性の程度について考える。束における順序関係と整合性のある標準モデル [5] を考えると、異なる添字をもつ様相論理式の間の含意公理とモデルにおける二項関係の関連性との間に完全性が成立する。このモデルから論理式の可能性の程度が束の要素の値として得られる。また、この束を単位区間に限ることによって、従来

の可能性理論が得られる。しかしながら、この定式化によれば、可能性の程度は必ずしも実数値に限る必要はない。

そこで、ここでは言語的指示やシステムの記述条件を束の要素として解釈することによって、拡張された可能性理論の枠組みを提案する。

2 多重様相論理

L を有限あるいは可算個の要素からなる半順序集合とし、その要素を ℓ, ℓ', k などで表す。L の半順序を $\prec$ で表す。ここでは、様相命題論理の体系を考える。すなわち、原子式を $p_0, p_1, \ldots$、一般の論理式を A で表す。論理式 A は原子式に論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ を作用させて得られる他に、L の要素を添字にもつ可能性記号 $\langle\ell\rangle$, 必然性記号 $[\ell]$ を作用させた $\langle\ell\rangle B$, $[\ell]B$ も論理式であるとする。なお、様相論理の議論の方法としてはいくつか異なったアプローチがあるが、ここでは、Chellas [5] を基準に考察を行う。

様相論理においては、形式的体系とモデルとの対応の議論が基本的である。形式的体系として、ここでは、次の (a), (b), (c) を仮定する。

(a) 命題論理の公理系と推論規則,

(b) 様相論理の公理

Df⟨ ⟩: $\langle\ell\rangle A \leftrightarrow \neg[\ell]\neg A$

K: $[\ell](A \rightarrow B) \rightarrow ([\ell]A \rightarrow [\ell]B)$,

(c) 公理 **Pos**(ℓ, ℓ'):

$$\langle\ell'\rangle A \rightarrow \langle\ell\rangle A, \qquad (\ell \prec \ell').$$

さらに、後で使用するため、スキーマ **Nec**(ℓ, ℓ') を

$$[\ell]A \rightarrow [\ell']A, \qquad (\ell \prec \ell')$$

で定義する。

一方、標準モデルとして、$\mathcal{M}_L = < W, R_\ell, P >, \ell \in L$ を考える。ここで、W は可能性世界の集合、$P = (P_0, P_1, \ldots)$ において P_i は原子式 p_i が真である W の部分集合。R_ℓ は ℓ に依存する W で定義された (到達可能) 二項関係で、次の性質を満たすとする。

$$R_{\ell'} \subseteq R_\ell, \qquad (\ell \prec \ell'). \tag{1}$$

このモデルにおける $[\ell]A, \langle\ell\rangle A$ の真偽は次のように定義される。

$$\models_\alpha^{\mathcal{M}_L} [\ell]A \iff \text{for every } \beta \text{ such that } \alpha R_\ell \beta,\ \models_\beta^{\mathcal{M}_L} A, \tag{2}$$

$$\models_\alpha^{\mathcal{M}_L} \langle\ell\rangle A \iff \text{for some } \beta \text{ such that } \alpha R_\ell \beta,\ \models_\beta^{\mathcal{M}_L} A. \tag{3}$$

このモデルの意義は、次の通りである。L の要素はシステムの (外的) 条件やシステムが置かれた環境を表す。命題の成立可能性は環境に依存する。$\ell \prec \ell'$ は ℓ' によって表される環

境が ℓ で表される環境よりもシステムの不確定性をより制限しており、可能性がより少なくなっていることを示す。従来の可能性理論では、L に相当するのは単位区間 (正確にいうと単位区間の有理数全体) である。ファジィ数は可能性分布とみられるが、同時に、ファジィ数の α-カットは一つの区間を表している。その場合、α が小さいほど区間すなわち不確定性が大きい環境が示されている。

次の定理が成立する。なお、以下で述べる定理の証明は付録に示す。

Theorem 1. (a), (b) の公理, 推論規則に (c) の公理 Pos を追加した体系と (a),(b) に Nec を公理として追加した体系は等価である。すなわち、両方の体系から証明される定理の全体は等しい。

Theorem 2. (a), (b), (c) によって定まる体系は (1) を満足する標準モデル $< W, R_\ell, P >$,$\ell \in L$ のクラスに関して健全かつ完全である。

3 束に値をとる可能性・必然性の程度

以下では、L が束であると仮定する。様相論理における $\vee$, $\wedge$ と束における演算を区別するため、束 L では、ℓ, ℓ' に対し $\ell \prec k$, $\ell' \prec k$ を満たす最小の要素を $\sup(\ell, \ell')$ と書き、$k \prec \ell$, $k \prec \ell'$ を満たす最大の要素を $\inf(\ell, \ell')$ と書く。さらに、$\hat{L}$ を L を含む完備束と仮定する。また、完備性の仮定から、L の任意の部分集合 K に対し、$\sup K \in \hat{L}$ と $\inf K \in \hat{L}$ が存在する。

いま、ある可能世界 α における命題 A の成立可能性の程度を $Pos(A;\alpha)$ と表し、次式で定義する。

$$Pos(A;\alpha) = \sup\{\ \ell\ : \models_\alpha^{\mathcal{M}_L} \langle \ell \rangle A,\ \ell \in L\}. \tag{4}$$

ここで、sup は L ではなく、完備束 $\hat{L}$ でとることに注意しよう。$Pos(A;\alpha)$ は A が可能となるような「最大の」ℓ を表す。また、$Pos(A;\alpha) \in \hat{L}$ に注意しよう。

一方、A の必然性の程度を

$$Nec(A;\alpha) = \inf\{\ \ell\ : \models_\alpha^{\mathcal{M}_L} [\ell] A,\ \ell \in L\}. \tag{5}$$

すなわち、A が必然となるような「最小の」ℓ で定義する。以下、必要のないときは、α を省略し、単に $Pos(A)$, $Nec(A)$ と書く。

次の定理が成り立つ。

Theorem 3. L が全順序集合ならば

$$Pos(A) \prec Nec(\neg A). \tag{6}$$

また、

$$Pos(A) \prec \ell \prec Nec(\neg A), \quad \ell \neq Pos(A),\ \ell \neq Nec(\neg A)$$

を満たす $\ell \in L$ は存在しない。

Example 1 [可能性理論]: $L=[0,1]$ の有理数全体、$\hat{L}=[0,1]$ と仮定する。すなわち、パラメータ $\ell \in L$ は単位区間の有理数である。このとき、前節で定義される $Pos(A)$, $Nec(A)$ は実数値をとる。いま、

$$\Pi(A)=Pos(A), \qquad \mathcal{N}(A)=1-Nec(\neg A)$$

とおく。可能性については前節の定義をそのまま用いるが、必然性については変換を行っていることに注意しよう。このとき、次の結果が得られる。

Theorem 4.

$$Pos(A)=Nec(\neg A), \tag{7}$$

$$\Pi(A)+\mathcal{N}(A)=1. \tag{8}$$

(8) は従来の可能性と必然性の測度の間に成り立つ関係を表している [2]。

Example 2 [言語的可能性測度]: 次に、L が有限個の言明 (ステートメント) から生成されるブール束とする。すなわち、システムの環境を表す有限個のアトミックな言明を $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_m$ とし、これらに AND, OR, NOT を作用させて生成された言明のすべてからなる集合を L とする。L は有限集合であることが知られている [6]。このとき、さきの $Pos(A)$ は A が可能である環境のうち、条件として最も制限の強い言明を示し、$Nec(A)$ は A が必然である環境のうち、最も制限の緩い言明を示す。また、明らかに L は完備であるので、$\hat{L}=L$ としてよい。

4 おわりに

ここで示した可能性の取り扱いは、可能性の程度が確率のそれと異なって、必ずしも実数値に限られないことを意味している。この取り扱いによって、あるシステムの置かれた環境を可能性の程度で示し、その上で確率的な取り扱いをするなどの考察が可能になる。要約すれば、ここでの考察は可能性理論と確率論とは相補的かつ協調的に一つのシステムに適用されることを示しているのである。

なお、このレポートは筑波大学 TARA プロジェクト研究の一部である。

参考文献

[1] L. A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems*, 1, pp. 3–28, 1978.

[2] D. Dubois, H. Prade, *Possibility Theory*, Plenum, New York, 1988.

[3] G. Shafer, *A mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ. Press, 1976.

[4] T. Murai, M. Miyakoshi, and M. Shimbo, Soundness and completeness theorems between the Dempster-Shafer theory and logic of belief, Proc. of FUZZ-IEEE 1994, June, 1994, Orlando.

[5] B. Chellas, *Modal Logic*, Cambridge Univ. Press, 1980.

[6] S. MacLane and G. Birkoff, *Algebra, 2nd ed.*, Macmillan, New York, 1979.

付録

Theorem 1 の証明.
$\ell \prec \ell'$とする。$\mathbf{Pos}(\ell, \ell')$ を公理とすると、

1. $\neg[\ell']\neg A \rightarrow \neg[\ell]\neg A$ (公理 Df$\langle\,\rangle$)
2. $[\ell]\neg A \rightarrow [\ell']\neg A$ (1 と命題論理の推論規則)
3. $[\ell]A \rightarrow [\ell']A$ ($\neg A$ を A に置換 [5])

すなわち、$[\ell]A \rightarrow [\ell']A$ が定理として証明された。$\mathbf{Nec}(\ell, \ell')$ を公理とすれば、上と同様にしてスキーマ $\mathbf{Pos}(\ell, \ell')$ が定理として導出される。詳細は省略する。(証明終)

Theorem 2 の証明.

[健全性:] 公理 Df$\langle\,\rangle$, K がすべての標準モデルで真であることはよく知られている [5]。従って、$\mathbf{Nec}(\ell, \ell')$ あるいは $\mathbf{Pos}(\ell, \ell')$ がモデル $\mathcal{M}_L$でつねに真であることを示せばよい。任意の可能世界αをとるとき、

$$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}_L} [\ell]A \rightarrow [\ell']A \iff if \ \models_{\alpha}^{\mathcal{M}_L} [\ell]A \ then \ \models_{\alpha}^{\mathcal{M}_L} [\ell']A$$

であるが、一方、(1) から、$\alpha R_{\ell'} \beta$を満たすα, βは$\alpha R_{\ell'} \beta$をも満足する。よって (2) により、$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}_L} [\ell]A$ ならば $\models_{\alpha}^{\mathcal{M}_L} [\ell']A$ となり、$\mathbf{Nec}(\ell, \ell')$ が常に真であることがわかる。

[完全性:] 便宜上、モデル $\mathcal{M}_L$における R_ℓが (1) を満たすとき、このモデルのクラスを $C(\ell)$ と書くことにする。完全性を示すには、

$$\models_{C(\ell)} \langle \ell' \rangle A \rightarrow \langle \ell \rangle A \Longrightarrow \vdash \langle \ell' \rangle A \rightarrow \langle \ell \rangle A \tag{9}$$

($\ell \prec \ell'$) を示せばよい。ここで、$\vdash A$ は Theorem 2 に述べられる体系において A が定理であることを示す記号である。

このことを証明するためには、真正準標準モデル (proper canonical standard model, ここでは PCSM と略称する) を構成し、この PCSM が (1) を満たすことを示せばよい。PCSM は通常の方法 [5] で構成される。この詳細は省略する。なお、PCSM を構成するとき、L が可算個の要素からなるという仮定を用い、Lindenbaum の補題を適用することに注意しよう。

PCSM では、可能世界α, βは論理式の極大無矛盾集合であり、

$$\alpha R_{\ell'} \beta \iff \{\langle \ell' \rangle A \ : \ A \in \beta\} \subseteq \alpha$$

で $R_{\ell'}$が定義される。この式の右辺は

$$\text{if } A \in \beta \text{ then } \langle \ell' \rangle A \in \alpha$$

と等価であり、$\mathbf{Pos}(\ell, \ell')$ が公理もしくは定理であるので、これから構成した PCSM について

$$\text{if } \langle \ell' \rangle A \in \alpha \text{ then } \langle \ell \rangle A \in \alpha$$

が成り立つ。最後の関係は$\alpha R_\ell \beta$ と等しいので、これらを合わせると PCSM が (1) を満たすことがわかる。従って、この PCSM はクラス $C(\ell)$ に属し、PCSM については常に真な論理式と定理の全体が一致するので (9) が成立している。(証明終)

Theorem 3 の証明.

$$\begin{aligned} Nec(\neg A; \alpha) &= \inf\{\ell : \models_\alpha^{\mathcal{M}_L} [\ell]\neg A\} \\ &= \inf\{\ell : not \models_\alpha^{\mathcal{M}_L} \langle \ell \rangle A\} \end{aligned}$$

である。そこで、L の要素を $\models_\alpha^{\mathcal{M}_L} \langle \ell \rangle A$ が成り立つ部分集合 Kと成り立たない集合 K'に分けると、(1), (3) と全順序の仮定からから $\ell \in K$と $\ell' \in K'$について $\ell \prec \ell'$である。このことから、(6) は明らかである。後半は L の任意の要素が Kと K'のいずれか一方だけに属することから自明である。(証明終)

Theorem 4 の証明.
L を単位区間の有理数とする。この場合集合が全順序であるので、Theorem 3 が成立するが、L を単位区間の実数の部分集合と考えるとき、有理数の稠密性によって Theorem 3 での Kと K'について $\sup K = \inf K'$が成立する。よって (7) が成立する。後半は定義より明らかである。(証明終)