

SPECTにおける解析的画像再構成法の
体系化に向けて (Toward Unifying Analytical
Image Reconstruction Methods for SPECT)

工藤 博幸 (Hiroyuki Kudo)

1995年7月21日 (July 21, 1995)

ISE-TR-95-122

筑波大学電子・情報工学系，茨城県つくば市天王台1-1-1

Institute of Information Sciences and Electronics
University of Tsukuba, Tennoudai 1-1-1, Tsukuba 305, Japan

Phone: 0298-53-5516 E-mail: kudo@imaging.cc.tsukuba.ac.jp

SPECTにおける解析的画像再構成法の体系化に向けて

(Toward Unifying Analytical Image Reconstruction Methods for SPECT)

筑波大学 電子・情報工学系 工藤 博幸

1. はじめに

一様吸収係数 μ を仮定したSPECTの画像再構成において、Belliniら[1]とInouye先生ら[2]により類似した数学的構造を持つ画像再構成法が提案された。そして、この両者の関係について国内で種々の論議があるようである。私の知人の中にも、『両者は数学的に等価だ』という人もあれば、『両者は数学的に違う』という人もある。ここで、『2つの再構成法の投影データに含まれる冗長性の取り扱いが同じで、雑音を含むデータに対して全く同じ再構成画像を与えるとき数学的に等価である』[3]という。また、『投影データの対称化を行ったBelliniらの方法は数学的に誤っている』という主張もあるように聞いた。これらの解析を複雑にしているのは、論文によって記号の定義や画像と投影データが実数であることに起因する関数の対称性の取り扱いが異なることが原因であると思う。更に、これらの方法とは異質のものとして、TretiakとMetz[4]による重み付き逆投影を用いた画像再構成法がある。この方法は雑音の伝播特性が悪いことが実験的に示されている。TretiakとMetzの方法とBelliniらやInouye先生らの方法はどんな関係にあるのだろうか。そこで、私なりにこれらの問題について考察し、種々の方法を体系的にとらえることを行ってみた。また、これらの方法の雑音伝播特性をある程度理論的に考察し、その結果に基づいて最適な雑音伝播特性を持つ画像再構成法を導出することを試みた。

2. 数学的準備

記号は全てInouye先生らの論文[2]と同じものを使用する。原画像を $f(x, y)$ とすれば、問題は次式で定義されるExponential Radon Transformの逆変換を求めることに帰着する。

$$g(X, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-\mu Y) dY \quad (1)$$

$$X = x \cos \phi + y \sin \phi, \quad Y = -x \sin \phi + y \cos \phi \quad (2)$$

SPECTの画像再構成がExponential Radon Transformの逆変換に帰着される過程については、文献[1,2,4,5]に示されているので省略する。以降では式(1)の $g(X, \phi)$ のことを投影データと呼ぶ。数学的準備として以下の関数を定義しておく。

[原画像のフーリエ変換 $F(\xi, \eta)$ とその極座標フーリエ級数 $F_n(\rho)$]

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(\xi x + \eta y)] dx dy \quad (3)$$

$$F_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \exp(-in\theta) d\theta \quad (4)$$

[投影データのフーリエ変換 $G(\gamma, \phi)$ とその円調和級数 $G_n(\gamma)$]

$$G(\gamma, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X, \phi) \exp(-i\gamma X) dX \quad (5)$$

$$G_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\gamma, \phi) \exp(-in\phi) d\phi \quad (6)$$

以上の関数は変数 ξ, η, ρ, γ については(負の値も含む)全ての実数で定義され、角度 ϕ, θ については周期 2π の周期関数とする。また、変数 n については(負の値も含む)全ての整数で定義される。原画像 $f(x, y)$ と投影データ $g(X, \phi)$ が実数であるとき、上述の関数は次式で表される対称性を持つことが示される。

$$F(-\xi, -\eta) = F^*(\xi, \eta) \quad (7)$$

$$F_{-n}(\rho) = (-1)^n F_n^*(\rho) \quad (8)$$

$$F_n(-\rho) = (-1)^n F_n(\rho) \quad (9)$$

$$G(-\gamma, \phi) = G^*(\gamma, \phi) \quad (10)$$

$$G_{-n}(-\gamma) = G_n^*(\gamma) \quad (11)$$

3. Inouye 先生らの解法の一般化

Bellini らの方法も Inouye 先生らの方法も $G_n(\gamma)$ と $F_n(\rho)$ の関係式を利用して画像再構成を行っている。即ち、(1) 投影データ $g(X, \phi)$ から $G_n(\gamma)$ を求め、(2) $G_n(\gamma)$ から $F_n(\rho)$ を求め、(3) $F_n(\rho)$ から $F(\xi, \eta)$ を求め、(4) フーリエ逆変換で $f(x, y)$ を再構成する、の4つの手順を基本的にとっている。但し、式(7)～(11)の対称性から $n \geq 0$ についてのみ考えれば画像再構成が行えるので、特に断わらない場合は以下の議論は全て $n \geq 0$ のみを考えている。この形の画像再構成では、 $G_n(\gamma)$ から $F_n(\rho)$ を求める部分が最も重要と考えられ、Inouye 先生らはこれを行うための $G_n(\gamma)$ と $F_n(\rho)$ の関係式(文献[2]の式(13))を Elegant な方法で導いた。そこで、この関係式を深く考察してみた。その結果、 $\gamma < 0$ の場合には Inouye 先生らの関係式は正しくなく修正が必要ながことが分かった。関数 $G_n(\gamma)$ は $\gamma < 0$ の場合にも計算できるのに、何故 Inouye 先生らの関係式は $\gamma < 0$ の $G_n(\gamma)$ の場合を考慮していないのかと疑問に思った。変数 n を固定して考えると $G_n(\gamma)$ と $G_n(-\gamma)$ の間にはエルミート対称の関係は成立しないので、 $\gamma < 0$ の $G_n(\gamma)$ も再構成に利用することが良いように思った。そこで、恐れながらも井上多門先生に質問に行ってみた。井上多門先生の返答と私の受け取り方の間にミスマッチがなければ、『 $\gamma < 0$ の $G_n(\gamma)$ は数学的に厳密な再構成に必要なので最初から考えていない』というのが答えであった。確かに Inouye 先生らの再構成式を見るとそうなっている。しかし、 $\gamma < 0$ の $G_n(\gamma)$ と $F_n(\rho)$ の関係式が導けるならばこれを再構成に用いても数学的に誤りではないと考え直し、 $\gamma < 0$ の $G_n(\gamma)$ も再構成に利用できるように $G_n(\gamma)$ と $F_n(\rho)$ の関係式を一般化してみることにした。その過程(ほとんど文献[2]と同じ)を以下に示す。

式(1)を式(5)に代入すると $G(\gamma, \phi)$ は次のように書ける。

$$G(\gamma, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(\gamma X - i\mu Y)] dX dY \quad (12)$$

ここで、 $(\gamma, -i\mu)$ に次の変数変換を施す。

$$\gamma = \omega \cos \nu, \quad -i\mu = \omega \sin \nu \quad (13)$$

式 (13) を (ω, ν) について解くと次式となる.

$$\omega = \operatorname{sgn}(\gamma)\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}, \quad \nu = \frac{i}{2} \ln \frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu} \quad (14)$$

$$\operatorname{sgn}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \gamma > 0 \\ 0 & \text{if } \gamma = 0 \\ -1 & \text{if } \gamma < 0 \end{cases} \quad (15)$$

式 (14) で $\operatorname{sgn}(\gamma)$ が必要なことは簡単に分かる. 式 (13), (14) で $\mu = 0$ とおいてみよう. 式 (13) は $\nu = 0, \gamma = \omega$ となる. 一方, 式 (14) は $\operatorname{sgn}(\gamma)$ がなければ $\nu = 0, \omega = |\gamma|$ となってしまふ. 従って, $\gamma < 0$ の場合にも式 (13) と式 (14) の間に 1 対 1 の対応関係が成立するためには, $\operatorname{sgn}(\gamma)$ が絶対に必要である. また, $|\gamma| \geq \mu$ のとき, ω は実数で ν は純虚数となる. 式 (13) を式 (12) に代入すると次式が得られる.

$$G(\gamma, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i\omega[x \cos(\phi + \nu) + y \sin(\phi + \nu)]\} dx dy \quad (16)$$

式 (16) と式 (3) を比較すると, 次の投影切断面定理を拡張した式が成立することが分かる.

$$G(\gamma, \phi) = F(\omega \cos(\phi + \nu), \omega \sin(\phi + \nu)) \quad (17)$$

式 (17) を $G(\gamma, \phi)$ から $F(\rho, \theta)$ を求める形に変形すると次式となる (θ は実数とする).

$$F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = G(\gamma, \theta - \nu) \quad (18)$$

式 (18) を用いて $G(\gamma, \phi)$ から $F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ を計算する. しかし, 式 (18) の $G(\gamma, \theta - \nu)$ において $\theta - \nu$ は複素数であるのに, 我々は実数の ϕ に対する $G(\gamma, \phi)$ しか利用できない. そこで, $F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ が解析関数であることを利用した Inouye 先生らの解析接続の方法を用いる. まず, 次式で $G(\gamma, \phi)$ の円調和級数の係数 $G_n(\gamma)$ を求める.

$$G_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\gamma, \phi) \exp(-in\phi) d\phi \quad (19)$$

次に, 複素数 $\theta - \nu$ に対する $G(\gamma, \theta - \nu)$ の値を次式の級数によって計算する.

$$G(\gamma, \theta - \nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(\gamma) \exp[in(\theta - \nu)] \quad (20)$$

式 (18), (20) に式 (14) を代入すれば次式が得られる.

$$F(\operatorname{sgn}(\gamma)\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \cos \theta, \operatorname{sgn}(\gamma)\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(\gamma) \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu}\right)^{n/2} \exp(in\theta) \quad (21)$$

ここで、 $\gamma < 0$ の場合についてのみ $\theta = \theta' + \pi$ の変数変換を行ってみれば、式 (21) は次のように書けることが分かる。

$$F(\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \cos \theta, \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(\gamma) (\text{sgn}(\gamma))^n \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu}\right)^{n/2} \exp(in\theta) \quad (22)$$

一方、式 (4) の極座標フーリエ級数の係数 $F_n(\rho)$ を用いて $F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ は次のように書ける。

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\rho) \exp(in\theta) \quad (23)$$

式 (22) と式 (23) を比べると $F_n(\rho)$ と $G_n(\gamma)$ を結びつける次式が得られる。

$$F_n(\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}) = (\text{sgn}(\gamma))^n \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu}\right)^{n/2} G_n(\gamma) \quad (24)$$

これと Inouye 先生らの $\gamma > 0$ についてのみ成り立つ関係式を比べると、 $\gamma < 0$ の $G_n(\gamma)$ の場合には $(-1)^n$ を右辺につけることが必要であることが分かる。式 (24) から $|\gamma| \geq \mu$ の $G_n(\gamma)$ しか $F_n(\rho)$ の計算に関係しないことは明らかなので、以降では $|\gamma| \geq \mu$ についてのみ考える。また、 $\rho \geq 0$ の $F_n(\rho)$ のみで画像再構成が行えることも明らかなので、以降では $\rho \geq 0$ についてのみ考える。

そこで、 $G_n(\gamma)$ から $F_n(\rho)$ を求める際に $\gamma < 0$ の $G_n(\gamma)$ と $\gamma > 0$ の $G_n(\gamma)$ の両方が利用できるように、Inouye 先生らの再構成式を一般化してみる。式 (24) で $\rho = \sqrt{\gamma^2 - \mu^2}$ とおくと次の 2 式が得られる。

$$F_n(\rho) = \left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu}\right)^{n/2} G_n(\gamma_0) \quad (25)$$

$$F_n(\rho) = (-1)^n \left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu}\right)^{n/2} G_n(-\gamma_0) \quad (26)$$

$$\gamma_0 = \sqrt{\rho^2 + \mu^2} \quad (27)$$

式 (25), (26) は $F_n(\rho)$ の値が $G_n(\gamma_0)$ と $G_n(-\gamma_0)$ から 2 回重複して計算できることを意味している。即ち、SPECT の投影データは次式で表される冗長性を本質的に持っている。

$$\left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu}\right)^{n/2} G_n(\gamma) = (-1)^n \left(\frac{\gamma + \mu}{\gamma - \mu}\right)^{n/2} G_n(-\gamma) \quad (28)$$

式 (28) は Tretiak と Metz[4] や Hawkins ら [5] によっても示されている。この関係は投影データが実数であることに起因するものではなく、consistent な投影データ (ある画像から Exponential Radon Transform により求められたた投影データ) についてのみ満足される性質である。従って、雑音成分などの inconsistent な投影データについては式 (28) は成り立たない。特別な場合として式 (28) で $\mu = 0$ とおくと次式が得られる。

$$G_n(\gamma) = (-1)^n G_n(-\gamma) \quad (29)$$

式 (29) が吸収なしの投影データにおける対称性 $g(-X, \phi + \pi) = g(X, \phi)$ と等価であることは簡単に証明できる。従って、式 (28) の投影データの冗長性を $G_n(\gamma)$ から $F_n(\rho)$ を求める

際にどのように利用するかによって、consistent な投影データに対してはどれも厳密解を与えるが inconsistent な雑音成分の伝播特性が異なる多くの再構成法が導出できる。これは、3次元画像再構成問題で投影データの冗長性を利用して雑音を抑制する研究 [3] や最尤推定により雑音の影響を軽減する研究が行われているのと本質的に同じ議論である。以降では、Clack の論文 [3] の定義を用いて、『2つの再構成法が inconsistent な投影データに対しても同じ解を与える場合のみ2つの再構成法が数学的に等価である』と呼ぶことにする。

さて、 $G_n(\gamma)$ から $F_n(\rho)$ を求める際に、 $G_n(\gamma_0)$ と $G_n(-\gamma_0)$ に合計が1となるような重みを乗じて加え合わせることを考えてみよう。これを式で表すと次式となる。

$$F_n(\rho) = \frac{a_n(\gamma_0) \left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu}\right)^{n/2} G_n(\gamma_0) + b_n(\gamma_0) (-1)^n \left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu}\right)^{n/2} G_n(-\gamma_0)}{a_n(\gamma_0) + b_n(\gamma_0)} \quad (30)$$

ここで、 $a_n(\gamma)$ と $b_n(\gamma)$ は $a_n(\gamma) + b_n(\gamma) \neq 0$ ($|\gamma| \geq \mu, n = 0, 1, \dots, \infty$) となるような任意の関数で良い (その物理的意味から定義域 ($|\gamma| \geq \mu, n = 0, 1, \dots, \infty$) で負の値をとらない関数に限定する)。

式 (30) を用いて $G_n(\gamma)$ から $F_n(\rho)$ を求め画像再構成を行う手法は、Inouye 先生らの方法を一般化したものと言える。以降ではこの方法に基づいて次の事実を示すことにする。

(1) 『対称化を行わない Bellini らの方法』、『Inouye 先生らの方法』、『対称化を行う Bellini らの方法』の3つの手法は一般化した Inouye 先生らの方法で重み関数 $a_n(\gamma), b_n(\gamma)$ が特別な場合となっている。いずれも厳密な方法である。■

(2) 『対称化を行わない Bellini の方法』と『Inouye 先生らの方法』は数学的に等価であり、『対称化を行う Bellini らの方法』と先の2つは数学的に等価でない。■

(3) 『Tretiak と Metz の方法』は、一般化した Inouye 先生らの方法で重み関数 $a_n(\gamma), b_n(\gamma)$ をある特定のものを選んで場合と数学的に等価である。また、この方法は先の3つの方法のいずれとも数学的に等価でない。■

(4) 上述の4つの方法の雑音伝播特性の相違について論じる。更に、この結果に基づいて最適な雑音伝播特性を持つ再構成法を導く。■

4. Inouye 先生らの方法と対称化を行わない Bellini らの方法

Inouye 先生らの方法で上述の冗長性をどのように利用しているのか、私には最近まで全く分からなかった。これは、Inouye 先生らの論文 [2] においてその記述が全くなかったためである。しかし、上述のように Inouye 先生らの論文の $F_n(\rho)$ と $G_n(\rho)$ の関係式 (文献 [2] の式 (13)) が $\gamma < 0$ のとき成立しないことに気付き、恐れながらも井上多門先生に質問に行ってみた。井上多門先生の返答と私の受け取り方の間に mismatch がなければ、『 $\gamma < 0$ の $G_n(\gamma)$ は数学的に厳密な再構成に必要なので最初から考えていない』というのが答えだった。そこで、 $\gamma < 0$ の $G_n(\gamma)$ を使用しないものを Inouye 先生らの方法と呼ぶ。 $\gamma < 0$ の $G_n(\gamma)$ を使用しないことは、式 (30) で次のようにおくことに相当する。

$$a_n(\gamma) = 1, b_n(\gamma) = 0 \quad (31)$$

その結果として式 (30) は次のようになる。

$$F_n(\rho) = \left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu}\right)^{n/2} G_n(\gamma_0) \quad (32)$$

式 (32) を用いた再構成法は以下のようなになる。但し、誤った解釈が生じないように必要な各関数の計算を行う範囲も示す。

(1) 投影データ $g(X, \phi)$ のフーリエ変換を行う。

$$G(\gamma, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X, \phi) \exp(-i\gamma X) dX$$

$$(\mu \leq \gamma \leq \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi) \quad (33)$$

(2) $G(\gamma, \phi)$ の円調和級数の係数 $G_n(\gamma)$ を求める。

$$G_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\gamma, \phi) \exp(-in\phi) d\phi$$

$$(\mu \leq \gamma \leq \infty, n = 0, 1, \dots, \infty) \quad (34)$$

(3) 式 (32) を利用して吸収補正を行い $F_n(\rho)$ を求める。

$$F_n(\rho) = \left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu} \right)^{n/2} G_n(\gamma_0)$$

$$(0 \leq \rho \leq \infty, n = 0, 1, \dots, \infty) \quad (35)$$

(4) 原画像のフーリエ変換 $F(\xi, \eta)$ を求める。この際に式 (8) の $F_n(\rho)$ の対称性を考慮すれば、 $n = 0, 1, \dots, \infty$ の $F_n(\rho)$ だけから次式で $F(\xi, \eta)$ が求められる。また、 $F(\xi, \eta)$ を計算する範囲もそのエルミート対称性から (ξ, η) 平面の半分の領域で良い。 ■

$$\operatorname{Re}[F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)] = \operatorname{Re}[F_0(\rho)] + 2\operatorname{Re}\left[\sum_{n=2}^{\text{even}} F_n(\rho) \exp(in\theta)\right]$$

$$\operatorname{Im}[F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)] = 2\operatorname{Im}\left[\sum_{n=1}^{\text{odd}} F_n(\rho) \exp(in\theta)\right]$$

$$(0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi) \quad (36)$$

(5) $F(\xi, \eta)$ を計算しなかった (ξ, η) について、 $F(\xi, \eta)$ をそのエルミート対称性を利用して埋める。そして、フーリエ逆変換を行い再構成画像を求める。

$$F(-\xi, -\eta) = F^*(\xi, \eta)$$

$$(-\infty \leq \xi \leq \infty, 0 \leq \eta \leq \infty) \quad (37)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \exp[i(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta \quad (38)$$

■

次に、対称化を行わない Bellini らの方法と Inouye 先生らの方法の関係を述べる。まず、簡単な計算により次式が成立することが示される。

$$\left(\frac{\gamma-\mu}{\gamma+\mu}\right)^{n/2} = \begin{cases} \exp(-n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}}) & \text{if } \gamma \geq \mu \\ \exp(n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}}) & \text{if } \gamma \leq -\mu \end{cases} \quad (39)$$

式 (39) を式 (32) に代入すれば次式が得られる。

$$F_n(\rho) = \exp(-n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma_0^2 - \mu^2}}) G_n(\gamma_0) \quad (40)$$

従って、Inouye 先生らの方法の手順 (3) を次の (3') で置き換えても数学的に全く等価である。

(3') 式 (40) を利用して吸収補正を行い $F_n(\rho)$ を求める。

$$F_n(\rho) = \exp(-n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma_0^2 - \mu^2}}) G_n(\gamma_0) \quad (0 \leq \rho \leq \infty, n = 0, 1, \dots, \infty) \quad (41)$$

■

更に、式 (8) の $F_n(\rho)$ の対称性を利用して、Inouye 先生らの方法の手順 (4) を以下の手順 (4'-1) と (4'-2) で置き換えても数学的に全く等価である。

(4'-1) $n < 0$ の $F_n(\rho)$ を次式により求める。

$$F_{-n}(\rho) = (-1)^n F_n^*(\rho)$$

$$(0 \leq \rho \leq \infty, n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (42)$$

(4'-2) 次式のフーリエ級数展開により $F_n(\rho)$ から $F(\xi, \eta)$ を求める。

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\rho) \exp(in\theta)$$

$$(0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi) \quad (43)$$

■

上述の手順 (3') と手順 (4') の置き換えを行ったものが対称化を行わない Bellini らの方法である。従って、Inouye 先生らの方法と対称化を行わない Bellini らの方法は数学的に等価である。但し、Bellini らの論文 [1] の式 (6) には不注意な誤りがあり (エルミート対称性が抜けている)、次のように訂正する必要がある。

$$h_{-k} \exp(k \sinh^{-1} \frac{\alpha}{R}) = (-1)^k h_k^* \exp(-k \sinh^{-1} \frac{\alpha}{R})$$

また、『対称化を行わない Bellini らの方法』と『Inouye 先生らの方法』が数学的に等価だということになっても、再構成式の導出の過程は Bellini らの論文 [1] より Inouye 先生らの論文 [2] の方がはるかに Elegant で分かりやすい。従って、Inouye 先生らの論文はとても優れた論文である。Inouye 先生らの論文がなければ、私もこの問題について深く理解できなかったと思う。

5. 対称化を行う Bellini らの方法

次に、対称化を行う Bellini らの方法を考える。この方法は、上述の一般化した Inouye 先生らの方法において、重み関数 $a_n(\gamma)$ と $b_n(\gamma)$ を次のように選んだ場合に相当する。

$$a_n(\gamma) = \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu}\right)^{-n/2}, \quad b_n(\gamma) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\gamma - \mu}\right)^{-n/2} \quad (44)$$

以下でこの事実を証明する。式 (44) を式 (30) に代入すると次式が得られる。

$$F_n(\rho) = \frac{G_n(\gamma_0) + (-1)^n G_n(-\gamma_0)}{\left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu}\right)^{n/2} + \left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu}\right)^{n/2}} \quad (45)$$

式 (39) を用いて式 (45) の分母は簡単に次式となることが示される。

$$\left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu}\right)^{n/2} + \left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu}\right)^{n/2} = 2 \cosh\left(n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma_0^2 - \mu^2}}\right) \quad (46)$$

また、式 (45) の分子は以下のように計算できる。

$$G_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(X, \phi) \exp(-i\gamma X) \exp(-in\phi) dX d\phi \quad (47)$$

$$\begin{aligned} (-1)^n G_n(-\gamma) &= (-1)^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(X, \phi) \exp(i\gamma X) \exp(-in\phi) dX d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(-X, \phi + \pi) \exp(-i\gamma X) \exp(-in\phi) dX d\phi \end{aligned} \quad (48)$$

但し、式 (48) の第 2 式を導くため $X = -X'$, $\phi = \phi' + \pi$ の変数変換を行った。この結果から次式が成立する。

$$G_n(\gamma) + (-1)^n G_n(-\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (g(X, \phi) + g(-X, \phi + \pi)) \exp(-i\gamma X) \exp(-in\phi) dX d\phi \quad (49)$$

ここで、 $g(X, \phi) + g(-X, \phi + \pi)$ は Bellini らの対称化した投影データに等しい。そこで、これを次のように $h(X, \phi)$ とおく。

$$h(X, \phi) = g(X, \phi) + g(-X, \phi + \pi) \quad (50)$$

すると、式 (45), (46), (49) により $h(X, \phi)$ から $F_n(\rho)$ を計算する過程は以下のように書ける。

$$H(\gamma, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(X, \phi) \exp(-i\gamma X) dX \quad (51)$$

$$H_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\gamma, \phi) \exp(-in\phi) d\phi \quad (52)$$

$$F_n(\rho) = \frac{H_n(\gamma_0)}{2 \cosh(n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma_0^2 - \mu^2}})} \quad (53)$$

従って、Bellini らの対称化を行う再構成法は、一般化した Inouye 先生らの方法で $\gamma > 0$ の $G_n(\gamma)$ と $\gamma < 0$ の $G_n(\gamma)$ が均等な重みで $F_n(\rho)$ に寄与するように重み関数 $a_n(\gamma)$ と $b_n(\gamma)$ を選んだものと解釈できる。即ち、画像再構成を行う前に投影データの対称化を行っても、原理的に再構成に必要な $F_n(\rho)$ の情報は完全に求められる。この方法は投影データの冗長性の取り扱いが Inouye 先生らの方法や対称化を行わない Bellini らの方法と異なり、先の 2 つの方法と数学的に等価でない。また、式 (51) ~ (53) を導く過程でどんな近似も用いていないので、厳密な方法である。ここで、以降で必要になる対称化した投影データ $h(X, \phi)$ に関する関数 $H(\gamma, \phi)$, $H_n(\gamma)$ の対称性をまとめておく ($g(X, \phi)$ が実数である場合)。

$$h(-X, \phi + \pi) = h(X, \phi) \quad (54)$$

$$H(\gamma, \phi + \pi) = H^*(\gamma, \phi) \quad (55)$$

$$H(-\gamma, \phi + \pi) = H(\gamma, \phi) \quad (56)$$

$$H_{-n}(\gamma) = (-1)^n H_n^*(\gamma) \quad (57)$$

$$H_n(-\gamma) = (-1)^n H_n(\gamma) \quad (58)$$

以上から、Bellini らの対称化した投影データから画像再構成を行う以下の手順が成立する。
 (1) 投影データ $g(X, \phi)$ の対称化を次式で行う。

$$h(X, \phi) = g(X, \phi) + g(-X, \phi + \pi) \quad (-\infty \leq X \leq \infty, 0 \leq \phi \leq \pi) \quad (59)$$

■
 (2) 対称化した投影データ $h(X, \phi)$ のフーリエ変換を行う。

$$H(\gamma, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(X, \phi) \exp(-i\gamma X) dX \quad (\mu \leq \gamma \leq \infty, 0 \leq \phi \leq \pi) \quad (60)$$

(3) $\pi \leq \phi \leq 2\pi$ の $H(\gamma, \phi)$ を式 (55) の対称性を利用して埋める.

$$H(\gamma, \phi + \pi) = H^*(\gamma, \phi)$$

$$(\mu \leq \gamma \leq \infty, 0 \leq \phi \leq \pi) \quad (61)$$

■
(4) $H(\gamma, \phi)$ の円調和級数の係数 $H_n(\gamma)$ を次式により求める.

$$H_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\gamma, \phi) \exp(-in\phi) d\phi$$

$$(\mu \leq \gamma \leq \infty, n = 0, 1, \dots, \infty) \quad (62)$$

■
(5) 式 (53) を利用して吸収補正を行い $F_n(\rho)$ を求める.

$$F_n(\rho) = \frac{H_n(\gamma_0)}{\left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu}\right)^{n/2} + \left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu}\right)^{n/2}} = \frac{H_n(\gamma_0)}{2 \cosh\left(n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma_0^2 - \mu^2}}\right)}$$

$$(0 \leq \rho \leq \infty, n = 0, 1, \dots, \infty) \quad (63)$$

但し, 式 (63) の第 2 式を用いても第 3 式を用いても数学的に等価である. ■

(6) 対称化を行わない Bellini らの方法の手順 (4') と同じ. または, Inouye 先生らの方法の手順 (4) を用いても良い. ■

(7) Inouye 先生らの方法の手順 (5) と同じ. ■

Bellini らの論文 [1] の計算手順のまとめでは, 上述の手順 (3) の必要性が明確に述べられていない. 従って, 結果だけを見てインプリメントを行うと誤った解釈をする可能性がある. 特に, 手順 (3) を行わないで $0 \leq \phi \leq \pi$ の $H(\gamma, \phi)$ のみで周期 π のフーリエ級数展開係数として $H_n(\gamma)$ を求めてはいけない. また, この方法は手順 (2) のフーリエ変換の計算が $0 \leq \phi \leq \pi$ であり対称化を行わない場合の半分で済み, 計算量が少ないという利点がある.

6. Tretiak と Metz の方法

Tretiak と Metz の重み付き逆投影による方法は, 一般化した Inouye 先生らの方法で $G_n(\gamma)$ から $F_n(\rho)$ を求める際の重み関数 $a_n(\gamma)$ と $b_n(\gamma)$ を次のように選んだ場合と数学的に等価である.

$$a_n(\gamma) = 1, b_n(\gamma) = 1 \quad (64)$$

以降ではこの事実を証明する. まず, 準備として原画像 $f(x, y)$ の極座標フーリエ級数を次式で定義する.

$$f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \exp(-in\theta) d\theta \quad (65)$$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) \exp(in\theta) \quad (66)$$

ここで、原画像 $f(x, y)$ が実数なら $f_n(r)$ は次式のエルミート対称性を満足する。

$$f_{-n}(r) = f_n^*(r) \quad (67)$$

$F_n(\rho)$ から $f(x, y)$ を再構成する手順は、ハンケル逆変換を用いて以下の3つのステップで実現される [4]。但し、 $J_n(\cdot)$ を n 次ベッセル関数とする。

[ハンケル逆変換を行う]

$$f_n(r) = \frac{1}{2\pi}(i)^n \int_0^\infty F_n(\rho) J_n(r\rho) \rho d\rho$$

$$(0 \leq r \leq \infty, n = 0, 1, \dots, \infty) \quad (68)$$

[対称性を利用して $n < 0$ の $f_n(r)$ を埋める]

$$f_{-n}(r) = f_n^*(r)$$

$$(0 \leq r \leq \infty, n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (69)$$

[極座標フーリエ級数を計算する]

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) \exp(in\theta)$$

$$(0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (70)$$

式 (68) ~ (70) による $F_n(\rho)$ からの再構成が式 (36) ~ (38) によるものと数学的に等価であることは、良く知られた事実であり簡単に証明できる (証明は省略する)。

式 (64) を式 (30) に代入すると $F_n(\rho)$ と $G_n(\gamma)$ の関係は次式となる。

$$F_n(\rho) = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu} \right)^{n/2} G_n(\gamma_0) + \frac{1}{2} (-1)^n \left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu} \right)^{n/2} G_n(-\gamma_0) \quad (71)$$

式 (71) を式 (68) に代入して $\rho = \sqrt{\gamma^2 - \mu^2}$ ($\gamma > 0$ の根を考える) の変数変換を行うと次式となる。

$$f_n(r) = \frac{1}{4\pi}(i)^n \left[\int_0^\infty G_n(\gamma_0) \left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu} \right)^{n/2} J_n(r\rho) \rho d\rho + (-1)^n \int_0^\infty G_n(-\gamma_0) \left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu} \right)^{n/2} \right. \\ \left. \times J_n(r\rho) \rho d\rho \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}(i)^n \left[\int_\mu^\infty G_n(\gamma) \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu} \right)^{n/2} J_n(r\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}) \gamma d\gamma + (-1)^n \int_\mu^\infty G_n(-\gamma) \right. \\ \left. \times \left(\frac{-\gamma - \mu}{-\gamma + \mu} \right)^{n/2} J_n(r\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}) \gamma d\gamma \right] \quad (72)$$

右辺第2項目について $\gamma = -\gamma'$ の変数変換を行うと次式となる。

$$f_n(r) = \frac{1}{4\pi}(i)^n \int_{|\gamma| \geq \mu} G_n(\gamma) (\text{sgn}(\gamma))^n \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu} \right)^{n/2} J_n(r\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}) |\gamma| d\gamma \quad (73)$$

$$\int_{|\gamma| \geq \mu} = \int_{-\infty}^{-\mu} + \int_{\mu}^{\infty} \quad (74)$$

ここで、文献 [4] の付録から簡単に導かれる次の恒等式が利用できる。

$$(i \operatorname{sgn}(\gamma))^n \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu} \right)^{n/2} J_n(r \sqrt{\gamma^2 - \mu^2}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\gamma r \cos \tau + \mu r \sin \tau) \exp(-in\tau) d\tau \quad (75)$$

式 (75) を式 (73) に代入し $G_n(\gamma)$ の定義式 (6) を用いると次式となる。

$$\begin{aligned} f_n(r) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \exp(\mu r \sin \tau) \int_{|\gamma| \geq \mu} G_n(\gamma) |\gamma| \exp(i\gamma r \cos \tau) \exp(-in\tau) d\gamma d\tau \\ &= \frac{1}{16\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\mu r \sin \tau) \int_{|\gamma| \geq \mu} G(\gamma, \phi) |\gamma| \exp(i\gamma r \cos \tau) \exp[-in(\tau + \phi)] d\gamma \\ &\quad d\phi d\tau \\ &\quad (n = 0, 1, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (76)$$

上述の $F_n(\rho)$ からの再構成手順では、 $n < 0$ の $f_n(r)$ は式 (76) から式 (69) の対称性を利用して求める。従って、次のようになる。

$$\begin{aligned} f_{-n}(r) &= f_n^*(r) \\ &= \frac{1}{16\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\mu r \sin \tau) \int_{|\gamma| \geq \mu} G^*(\gamma, \phi) |\gamma| \exp(-i\gamma r \cos \tau) \exp[in(\tau + \phi)] \\ &\quad d\gamma d\phi d\tau \\ &= \frac{1}{16\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\mu r \sin \tau) \int_{|\gamma| \geq \mu} G(\gamma, \phi) |\gamma| \exp(i\gamma r \cos \tau) \exp[in(\tau + \phi)] \\ &\quad d\gamma d\phi d\tau \\ &\quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (77)$$

但し、式 (77) の第 3 式を導くため $\gamma = -\gamma'$ の変数変換を行い式 (10) の $G(\gamma, \phi)$ のエルミート対称性を用いた。次に、式 (76), (77) を式 (70) に代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{1}{16\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\mu r \sin \tau) \int_{|\gamma| \geq \mu} G(\gamma, \phi) |\gamma| \exp(i\gamma r \cos \tau) \\ &\quad \times \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-in(\tau - \theta + \phi)] \right\} d\gamma d\phi d\tau \end{aligned} \quad (78)$$

ここで、 $\delta(\cdot)$ を Dirac のデルタ関数として次の良く知られた等式が成立する。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-in(\tau - \theta + \phi)] = 2\pi \delta(\tau - \theta + \phi) \quad (79)$$

式 (79) を式 (78) で用いると最終的な再構成式が得られる.

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \exp[\mu r \sin(\theta - \phi)] \int_{|\gamma| \geq \mu} G(\gamma, \phi) |\gamma| \exp[i\gamma r \cos(\theta - \phi)] d\gamma d\phi \quad (80)$$

明らかに式 (80) は Tretiak と Metz の重み付き逆投影による方法を表している. 従って, この方法は『Inouye 先生らの方法 (対称化を行わない Bellini らの方法)』, 『対称化を行う Bellini らの方法』のいずれとも数学的に等価でない. しかし, 導出の過程で近似を使っていないので厳密な方法である. この方法による再構成の手順は通常のフィルタ補正逆投影法とほぼ同じなので省略する.

7. 雑音伝播特性の説明

これまで述べてきた『Inouye 先生らの方法 (対称化を行わない Bellini らの方法)』, 『対称化を行う Bellini らの方法』, 『Tretiak と Metz の方法』の3つは, いずれも厳密解であることが示された. しかし, 投影データに含まれる式 (28) の冗長性の利用方法が異なるため, 数学的に等価でなく雑音伝播特性が異なることも同時に分かった. そこで, 3つの方法の雑音伝播特性について論じる.

まず, SPECT の投影データに含まれる放出フォトン数のゆらぎに起因する雑音が, $G_n(\gamma)$ にどのような形で伝播するかを考えてみる. SPECT の投影データ $p(X, \phi)$ から $G_n(\gamma)$ を計算する過程は次の2式で表される.

$$g(X, \phi) = \exp(\mu l(X, \phi)) p(X, \phi) \quad (81)$$

$$G_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(X, \phi) \exp(-i\gamma X) \exp(-in\phi) dX d\phi \quad (82)$$

放出フォトン数のゆらぎは平均と分散が同じ確率変数で表されることが良く知られている. いま, 各変数を確率変数化したものを $\overline{\cdot}$ で表し, 平均を $E[\cdot]$ で分散を $\text{var}[\cdot]$ で表す. このとき, 雑音が独立であると仮定して $\overline{p(X, \phi)}$, $\overline{g(X, \phi)}$, $\overline{G_n(\gamma)}$ の平均と分散を計算すると次式が得られる.

$$E[\overline{p(X, \phi)}] = p(X, \phi) \quad (83)$$

$$\text{var}[\overline{p(X, \phi)}] = p(X, \phi) \quad (84)$$

$$E[\overline{g(X, \phi)}] = \exp(\mu l(X, \phi)) p(X, \phi) \quad (85)$$

$$\text{var}[\overline{g(X, \phi)}] = \exp(2\mu l(X, \phi)) p(X, \phi) \quad (86)$$

$$E[\overline{G_n(\gamma)}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mu l(X, \phi)) p(X, \phi) \exp(-i\gamma X) \exp(-in\phi) dX d\phi \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \text{var}[\text{Re}[\overline{G_n(\gamma)}]] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{var}[\overline{g(X, \phi)}] \cos^2(\gamma X + n\phi) dX d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\mu l(X, \phi)) p(X, \phi) dX d\phi + \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\mu l(X, \phi)) \right. \\ &\quad \left. \times p(X, \phi) \cos[2(\gamma X + n\phi)] dX d\phi \right\} \\ &\approx \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\mu l(X, \phi)) p(X, \phi) dX d\phi \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned}
\text{var}[\text{Im}[\overline{G_n(\gamma)}]] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{var}[g(X, \phi)] \sin^2(\gamma X + n\phi) dX d\phi \\
&= \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\mu l(X, \phi)) p(X, \phi) dX d\phi - \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\mu l(X, \phi)) \right. \\
&\quad \left. \times p(X, \phi) \cos[2(\gamma X + n\phi)] dX d\phi \right\} \\
&\approx \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\mu l(X, \phi)) p(X, \phi) dX d\phi \tag{89}
\end{aligned}$$

但し、式(88), (89)の第3式を導くにあたって次の近似を用いた。第2式において第2項の被積分関数は $\exp(2\mu l(X, \phi))p(X, \phi)$ が十分滑らかな関数のとき角周波数 $(2\gamma, 2n)$ で正弦波状に振動するので、 $|\gamma| \geq \mu$ の範囲について第2項は第1項と比較して十分小さくなり無視できる。一様に近い線源の分布ならこの近似は妥当と考えられる。式(88), (89)の計算結果から、 $\text{var}[\text{Re}[\overline{G_n(\gamma)}]]$ と $\text{var}[\text{Im}[\overline{G_n(\gamma)}]]$ は (γ, n) に依存せず一定の値となることが分かる。上述の近似が現実の問題で成り立つかどうか不安であったが、Hawkinsらの論文[5]で同じことが述べられている(pp.149)のを見つけた。彼らは、『 $G_n(\gamma)$ に加わる雑音のパワースペクトルが均一な (γ, n) に依存しないことをモンテカルロ・シミュレーションを行い確認した』と述べている。

さて、上述の結果を用いて3つの方法の雑音伝播特性を考察してみよう。いずれの方法も $G_n(\gamma)$ から式(30)により $F_n(\rho)$ を求めて吸収補正を行っている。この過程は一般的に次のように書ける。

$$\begin{aligned}
F_n(\rho) &= c_n(\gamma_0)G_n(\gamma_0) + d_n(\gamma_0)G_n(-\gamma_0) \\
(0 \leq \rho \leq \infty, n = 0, 1, \dots, \infty) \tag{90}
\end{aligned}$$

ここで、各再構成法について $c_n(\gamma)$ と $d_n(\gamma)$ は以下ようになる。

[Inouye先生らの方法(対称化を行わないBelliniらの方法)]

$$c_n(\gamma) = \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu}\right)^{n/2}, \quad d_n(\gamma) = 0 \tag{91}$$

[対称化を行うBelliniらの方法]

$$c_n(\gamma) = \frac{1}{2 \cosh\left(n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}}\right)}, \quad d_n(\gamma) = \frac{(-1)^n}{2 \cosh\left(n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}}\right)} \tag{92}$$

[TretiakとMetzの方法]

$$c_n(\gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu}\right)^{n/2}, \quad d_n(\gamma) = \frac{1}{2} (-1)^n \left(\frac{\gamma + \mu}{\gamma - \mu}\right)^{n/2} \tag{93}$$

上述の $\text{var}[\text{Re}[\overline{G_n(\gamma)}]]$ と $\text{var}[\text{Im}[\overline{G_n(\gamma)}]]$ が (γ, n) に依存しないという解析結果から、実数部・虚数部ともに $G_n(\gamma_0)$ と $G_n(-\gamma_0)$ は同じ分散の雑音に汚されていると考えて良い。ここで、 $G_n(\gamma_0)$ と $G_n(-\gamma_0)$ の重み付き加算を行って $F_n(\rho)$ を計算するとき、 $c_n(\gamma_0)$ と $d_n(\gamma_0)$ の絶対値が大きいと $G_n(\gamma_0)$ と $G_n(-\gamma_0)$ に大きな値を乗じてしまうので雑音が拡大される。

従って、 $c_n(\gamma_0)$ と $d_n(\gamma_0)$ の絶対値が小さくなる冗長性の使い方をした再構成法が雑音伝播特性が良いと考えられる。この観点から上述の3つの方法を見てみよう。但し、 $n \geq 0$ の $F_n(\rho)$ しか計算してなく $\rho \geq 0$ のとき $\gamma_0 = \sqrt{\rho^2 + \mu^2} \geq \mu$ であるから、 $n \geq 0$, $\gamma \geq \mu$ の範囲のみを考えて考察を行って良い。Inouye 先生らの方法では $c_n(\gamma)$ の絶対値は1以下にしかならず $d_n(\gamma)$ は零であるから、雑音伝播特性は良いと考えられる。対称化を行う Bellini らの方法も $c_n(\gamma)$ と $d_n(\gamma)$ の絶対値は常に同じで $1/2$ 以下にしかならず、雑音伝播特性は良いと考えられる。次に、Tretiak と Metz の方法を考えてみよう。この方法では $c_n(\gamma)$ の絶対値は $1/2$ 以下であるが、 $d_n(\gamma)$ の絶対値は常に $1/2$ 以上でしかも $\gamma \approx \mu$ となる低周波において無限に大きな値となる。このことが原因で雑音の大きな拡大が起これると予想され、雑音が多い場合の再構成法としては明らかに問題があると考えられる。Inouye 先生らの方法と対称化を行う Bellini らの方法の優劣については、式 (90) ~ (93) を見ただけでは断言できない。しかし、式の形から考えて何か違いがあることは確かである。

そこで、各方法について $\text{Re}[\overline{F_n(\rho)}]$ と $\text{Im}[\overline{F_n(\rho)}]$ の分散を計算してみよう。いま、 $\text{Re}[\overline{G_n(\gamma)}]$ と $\text{Im}[\overline{G_n(\gamma)}]$ の分散を σ^2 とする。

$$\text{var}[\text{Re}[\overline{G_n(\gamma)}]] = \text{var}[\text{Im}[\overline{G_n(\gamma)}]] = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\mu l(X, \phi)) p(X, \phi) dX d\phi = \sigma^2 \quad (94)$$

このとき、式 (90) から $\text{Re}[\overline{F_n(\rho)}]$ と $\text{Im}[\overline{F_n(\rho)}]$ の分散は以下のように表される。

$$\text{var}[\text{Re}[\overline{F_n(\rho)}]] = \text{var}[\text{Im}[\overline{F_n(\rho)}]] = \sigma^2 (c_n^2(\gamma_0) + d_n^2(\gamma_0)) \quad (95)$$

式 (95) を各方法に当てはめると以下のようなになる。

[Inouye 先生らの方法 (対称化を行わない Bellini らの方法)]

$$\text{var}[\text{Re}[\overline{F_n(\rho)}]] = \text{var}[\text{Im}[\overline{F_n(\rho)}]] = \sigma^2 \left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu} \right)^n \quad (96)$$

[対称化を行う Bellini らの方法]

$$\begin{aligned} \text{var}[\text{Re}[\overline{F_n(\rho)}]] = \text{var}[\text{Im}[\overline{F_n(\rho)}]] &= \frac{2\sigma^2}{\left[\left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu} \right)^{n/2} + \left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu} \right)^{n/2} \right]^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{2 \cosh^2 \left(n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma_0^2 - \mu^2}} \right)} \end{aligned} \quad (97)$$

[Tretiak と Metz の方法]

$$\text{var}[\text{Re}[\overline{F_n(\rho)}]] = \text{var}[\text{Im}[\overline{F_n(\rho)}]] = \frac{\sigma^2}{4} \left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu} \right)^n + \frac{\sigma^2}{4} \left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu} \right)^n \quad (98)$$

$\mu = 0.15(\text{cm}^{-1})$ で線源の直径 R が $R = 30(\text{cm})$ の場合について、式 (96) ~ (98) をグラフに書いた結果を図 1 に示す。この図を見ると、Tretiak と Metz の方法の雑音伝播特性が悪いことはすぐ分かる。また、Inouye 先生らの方法と対称化を行う Bellini らの方法は雑音伝播

特性は良いが、両者の間に以下に述べる違いがあることが分かる。 $n < 15$ の $F_n(\rho)$ 成分については対称化を行う Bellini らの方法の方が優れており、 $n \geq 15$ の $F_n(\rho)$ 成分については Inouye 先生らの方法の方が優れている。また、Inouye 先生らの方法は低周波の小さい ρ に対する雑音伝播に優れ、対称化を行う Bellini らの方法は高周波の大きい ρ に対する雑音伝播に優れる傾向が見られる。これは一例であるが、他の条件の場合もほぼ同様な傾向になると思われる。以上のことから、Inouye 先生らの方法と対称化を行う Bellini らの方法の優劣については、 $F_n(\rho)$ の各角周波数 (ρ, n) 成分ごとに異なり一概にどちらが良いと結論づけることはできない。また、この解析結果を得るために式 (88), (89) で近似を行ったことも認識しておかねばならない。

8. 最適な雑音伝播特性を持つ再構成法

これまで述べてきた数学的枠組みに入る再構成法の中で、最も雑音伝播特性が良い方法とはどのような冗長性の取り扱いをしたものなのだろうか。これはごく自然に生じる誰もが考える疑問であると思う。この問題の解答を以下に述べる。まず、式 (30), (90) から $\text{Re}[\overline{F_n(\rho)}]$ と $\text{Im}[\overline{F_n(\rho)}]$ の分散を重み関数 $a_n(\gamma), b_n(\gamma)$ を用いて表す。その結果は次式となる。

$$\text{var}[\text{Re}[\overline{F_n(\rho)}]] = \text{var}[\text{Im}[\overline{F_n(\rho)}]] = \sigma^2 \frac{a_n^2(\gamma_0) \left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu}\right)^n + b_n^2(\gamma_0) \left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu}\right)^n}{(a_n(\gamma_0) + b_n(\gamma_0))^2} \quad (99)$$

雑音を抑制することは式 (99) の分散を小さくすることに等しいから、式 (99) を $a_n(\gamma), b_n(\gamma)$ について微分して零とおく。その結果として、最適な重み関数 $a_n(\gamma), b_n(\gamma)$ が次式のように得られる。

$$\frac{a_n(\gamma)}{a_n(\gamma) + b_n(\gamma)} = \frac{\left(\frac{\gamma + \mu}{\gamma - \mu}\right)^n}{\left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu}\right)^n + \left(\frac{\gamma + \mu}{\gamma - \mu}\right)^n} \quad (100)$$

$$\frac{b_n(\gamma)}{a_n(\gamma) + b_n(\gamma)} = \frac{\left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu}\right)^n}{\left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu}\right)^n + \left(\frac{\gamma + \mu}{\gamma - \mu}\right)^n} \quad (101)$$

式 (100), (101) を式 (30) に代入すると、最適な吸収補正を行う式は次のように求められる。

$$\begin{aligned} F_n(\rho) &= \frac{\left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu}\right)^{n/2} G_n(\gamma_0) + (-1)^n \left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu}\right)^{n/2} G_n(-\gamma_0)}{\left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu}\right)^n + \left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu}\right)^n} \\ &= \frac{\exp\left(n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma_0^2 - \mu^2}}\right) G_n(\gamma_0) + (-1)^n \exp\left(-n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma_0^2 - \mu^2}}\right) G_n(-\gamma_0)}{2 \cosh\left(2n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma_0^2 - \mu^2}}\right)} \end{aligned} \quad (102)$$

特筆すべきことは、式 (102) は『Inouye 先生らの方法』、『対称化を行う Bellini らの方法』、『Tretiak と Metz の方法』のいずれの場合とも同じでないことである。従って、これらの方

法は(程度の大小はあっても)雑音伝播特性は最適なものからずれている。過去の研究で主に雑音がない場合の数学的厳密性に重点がおかれたことを考えると、このような結果になっても仕方がないと思う。言葉を変えれば、Inouye 先生らの方法において $\gamma < 0$ の $G_n(\gamma)$ を使用しないことや対称化を行う Bellini らの方法で投影データの対称化を行う(式(102)の形の吸収補正が対称な投影データから不可能ことはすぐ証明できる)ことが、雑音の伝播特性を最適なものからずれさせる原因となっている。さて、Inouye 先生らの方法と対称化を行う Bellini らの方法の雑音伝播特性が、上述の最適な方法とどの程度ずれているかを考えてみよう。式(102)の最適な吸収補正を行ったときの $\text{Re}[\overline{F_n(\rho)}]$ と $\text{Im}[\overline{F_n(\rho)}]$ の分散は、式(99)から次式のように計算される。

$$\text{var}[\text{Re}[\overline{F_n(\rho)}]] = \text{var}[\text{Im}[\overline{F_n(\rho)}]] = \frac{\sigma^2}{\left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu}\right)^n + \left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu}\right)^n} \quad (103)$$

式(103)を他の方法と同じ条件下で図1のグラフに書いてみた。最適な方法が Inouye 先生らの方法や対称化を行う Bellini らの方法と比べて驚くほど良いわけではないが、どの方法も計算手順がほぼ同じことを考えると実用的には最適な方法を用いる方が良いと思う。

式(102)を用いた再構成法の計算手順を以下にまとめておく。

(1) 投影データ $g(X, \phi)$ のフーリエ変換を行う。

$$G(\gamma, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X, \phi) \exp(-i\gamma X) dX$$

$$(|\gamma| \geq \mu, 0 \leq \phi \leq 2\pi) \quad (104)$$

(2) $G(\gamma, \phi)$ の円調和級数の係数 $G_n(\gamma)$ を求める。

$$G_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\gamma, \phi) \exp(-in\phi) d\phi$$

$$(|\gamma| \geq \mu, n = 0, 1, \dots, \infty) \quad (105)$$

(3) 式(102)を利用して吸収補正を行い $F_n(\rho)$ を求める。

$$F_n(\rho) = \frac{\left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu}\right)^{n/2} G_n(\gamma_0) + (-1)^n \left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu}\right)^{n/2} G_n(-\gamma_0)}{\left(\frac{\gamma_0 - \mu}{\gamma_0 + \mu}\right)^n + \left(\frac{\gamma_0 + \mu}{\gamma_0 - \mu}\right)^n}$$

$$= \frac{\exp\left(n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma_0^2 - \mu^2}}\right) G_n(\gamma_0) + (-1)^n \exp\left(-n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma_0^2 - \mu^2}}\right) G_n(-\gamma_0)}{2 \cosh\left(2n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma_0^2 - \mu^2}}\right)}$$

$$(0 \leq \rho \leq \infty, n = 0, 1, \dots, \infty) \quad (106)$$

但し，第1式を用いても第2式を用いても数学的に等価である。■

(4) 対称化を行わない Bellini らの方法の手順(4')と同じ。または，Inouye 先生らの方法の手順(4)を用いても良い。■

(5) Inouye 先生らの方法の手順(5)と同じ。■

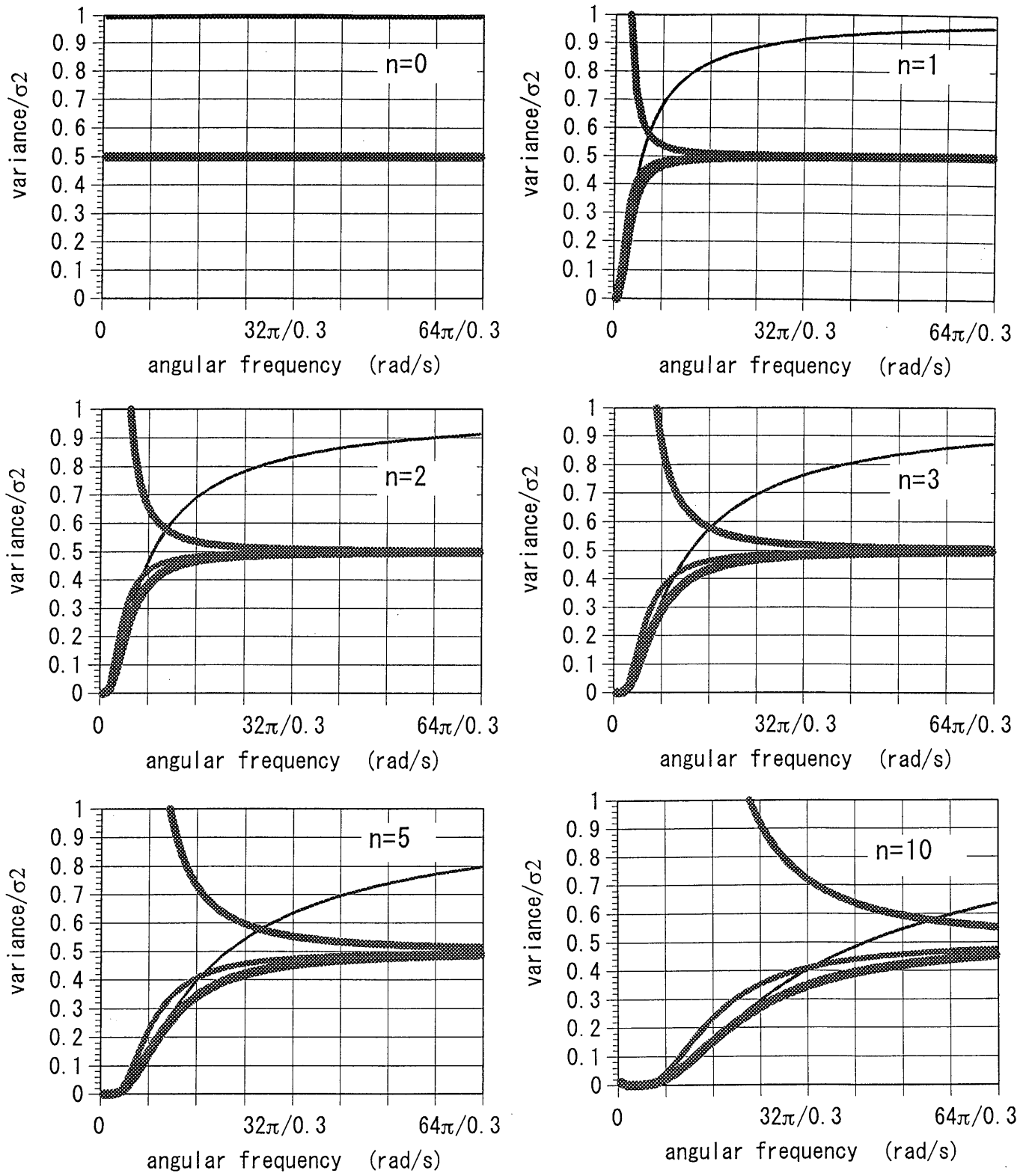
9. まとめ

Inouye 先生らの解法を投影データの冗長性が一般的に利用できるように拡張し，その特別な場合として『Inouye 先生らの方法(対称化を行わない Bellini らの方法)』、『対称化を行う Bellini らの方法』、『Tretiak と Metz の方法』を位置づけた。その結果，従来の研究で明らかでなかった4つの方法の関係を明確にすることができた。また，雑音伝播特性の相違について説明を加えることができ，最適な雑音伝播特性を持つ方法も導くことができた。

筆者の質問に快く答えてくださった井上多門先生と日頃御指導頂く斎藤恒雄先生に深謝致します。

10. 参考文献

- [1] S.Bellini *et al.*: "Compensation of tissue absorption in emission tomography," IEEE Trans.Acoust.Speech and Signal Process., Vol.ASSP-27, pp.213-218 (1979).
- [2] T.Inouye *et al.*: "Image reconstruction algorithm for single-photon-emission computed tomography with uniform attenuation," Phys.Med.Biol., Vol.34, pp.299-304 (1989).
- [3] R.Clack: "Toward a complete description of 3D filtered backprojection," Phys.Med. Biol., Vol.37, pp.645-660 (1992).
- [4] O.Tretiak and C.Metz: "The exponential Radon transform," SIAM J.Appl.Math., Vol.39, pp.341-354 (1980).
- [5] W.G.Hawkins *et al.*: "Validation of the circular harmonic transform (CHT) algorithm for quantitative SPECT," J.Nucl.Med., Vol.32, pp.141-150 (1991).



- Inouye
- Bellini (symmetric)
- Tretiak
- Optimum

図1 動径方向角周波数 ρ と雑音の分散の関係 (1)

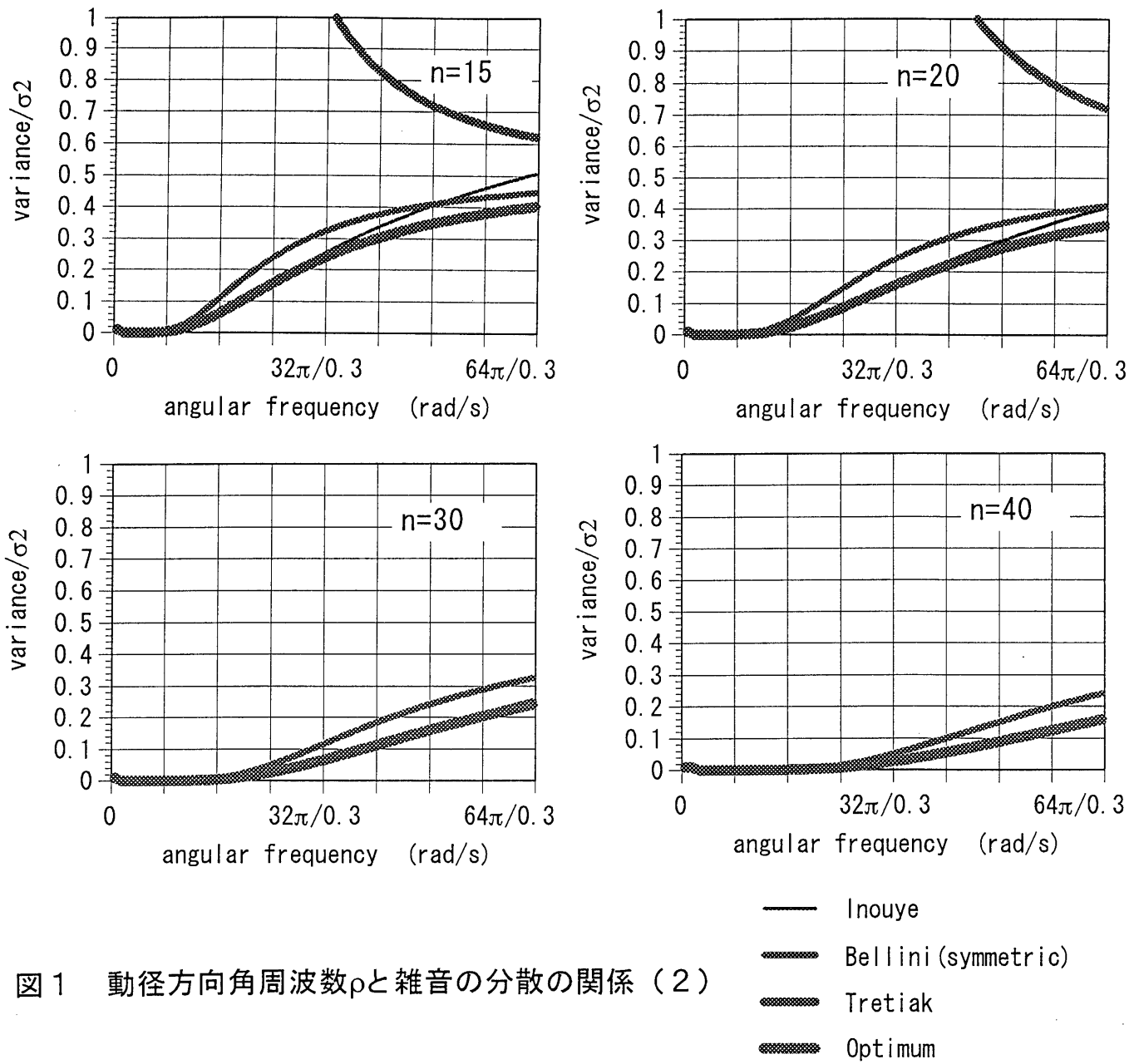


図1 動径方向角周波数 ρ と雑音の分散の関係 (2)