条件付き項書換え系における
階層合流性のモジュラ性

山田俊行
筑波大学 電子・情報工学系 井田研究室
toshi@softlab.is.tsukuba.ac.jp

1994年3月
ISE-TR-94-111

要旨

近年，条件付き項書換え系 (CTRS) に基づいた関数論理型言語の研究が広く行われている．また，ナローイングは関数論理型言語の有力な計算モデルとして注目されている．CTRS の階層合流性は，外変数のある書換え系でナローイングが完全性をもつために重要な性質である．本論文では，CTRS が階層合流性をもつことを証明する方法を提示する．そのために，次の2つの観点からの考察を行う．第一に，CTRS の性質とそれらの階層性に着目し，各性質の間に成り立つ含意関係を調べる．これにより，CTRS の各性質の中での階層合流性の位置付けを明らかにする．第二に，階層合流性が CTRS のモジュラ性であることを証明する．つまり，書換え規則の，関数記号を共有しない分割・統合に対して，CTRS の階層合流性が保存されることを証明する．

1　はじめに

項書換え系 (TRS) は，記号計算に関連した計算機科学の基礎理論として，その性質が長年にわたって研究されてきた．

TRS の研究成果を応用して，近年，TRS の拡張である条件付き項書換え系 (CTRS) に基づいた関数論理型言語を実現する試みがなされている [6]．関数論理型言語の有力な計算モデルとしては，ナローイングが注目されている．プログラミング言語としての記述力を向上させるには，外変数のある CTRS を考える必要がある．この場合，ナローイングの完全性に大きく影響する性質として，階層合流性が知られている [5][12]．しかし，与えられた CTRS が階層合流性をもつことを証明する方法はまだ確立されておらず，研究が必要とされる．

一方，(C)TRS の有用な性質としてモジュラ性が研究されている．この性質は，(C)TRS を複数のモジュールからなるプログラムとして見ると理解しやすい．各モジュールが，それぞれ同じ性質 P をもてば，それらを全て合わせたプログラムも性質 P をもち，逆に，プログラムが性質 P をもてば，各モジュールも性質 P をもつ．このとき，性質 P はモジュラ性であるという．本研究に関連の深い合流性のモジュラ性は，文献 [13][10] で論じられている．しかし，CTRS の階層合流性がモジュラ性であることは，まだ証明されていない．

そこで本論文では，CTRS が階層合流性をもつかどうかを証明する方法を提示する．そのために，次の 2 つの観点からの考察を行う．

(1) 階層合流性と CTRS の他の性質の間に成り立つ関係を調べる．

(2) 階層合流性が CTRS のモジュラ性であることを証明する．

本論文の構成は以下の通りである．まず第 2 節で CTRS の議論に必要な用語や概念を導入し，基本的な性質の解説を行う．第 3 節では，上で述べた (1) に従って，CTRS の基本的性質とそれらの階層性に着目し，各性質の間に成り立つ含意関係について考察する．第 4 節では，(2) で述べたように，階層合流性が CTRS のモジュラ性であることを証明する．最後に第 5 節では，本論文で得られた結果をまとめ，今後の研究課題について述べる．

2　準備

本節では，条件付き項書換え系の議論に必要な概念と用語の定義を行う．詳細については文献 [2][8] を参照されたい．

2.1　抽象書換え系

項書換え系を定義する前に，一般的な書換えを扱う抽象書換え系を定義し，その性質について述べる．

定義 2.1 抽象書換え系 (ARS)

抽象換え系 (abstract rewriting system，以後 ARS と略す) とは，集合 A と 2 項関係 $\rightarrow \subseteq A \times A$ との対 $(A, \rightarrow)$ である．関係 $a \rightarrow b$ を，a から b への書換えと呼ぶ．□

次に，書換えに関連した用語と記法を導入する．

定義 2.2

$(A, \rightarrow)$ を ARS とする．

- $\to$ で表された関係の逆を $\leftarrow$ で表す.
- $\to$ の推移閉包を $\to^+$，対称閉包を $\leftrightarrow$ で表す.
- $\to$ の反射推移閉包を $\to^*$ と表し，関係 $a \to^* b$ を a から b への簡約 (reduction) と呼ぶ.
- $a \to b$ を満たす b がないとき，a は正規形 (normal form) であるという．また，$a \to^* b$ を満たす正規形 b があるとき，a は正規形をもつという.
- $a_1 \to^* b \leftarrow^* a_2$ を満たす b があるとき $a_1 \downarrow a_2$ と書き，この b を a_1 と a_2 の公約項 (common reduct) と呼ぶ.

$\square$

次に，正規化性と合流性に関連した ARS の基本的な性質を定義する.

定義 2.3 ARS の基本的性質

$(A, \to)$ を ARS とする.

- 無限の長さの書換え $a \to a_1 \to a_2 \to \cdots$ が存在しないとき，a は強正規化性 (strongly normalizing, 以後 SN と略す) をもつといい，$\mathrm{SN}(a)$ と書く.
- a が正規形をもつとき，a は弱正規化性 (weak normalization, 以後 WN と略す) をもつといい，$\mathrm{WN}(a)$ と書く.
- a が高々 1 つの正規形をもつとき，a は単一正規化性 (unique normal forms, 以後 UN と略す) をもつといい，$\mathrm{UN}(a)$ と書く.
- a について $\forall b_1, b_2\ (b_1 \leftarrow^* a \to^* b_2 \Rightarrow b_1 \downarrow b_2)$ が成り立つとき，a は合流性 (confluence) をもつという．この性質は **Church-Rosser** 性 (Church-Rosser property, 以後 CR と略す) とも呼ばれる．そこで，a が合流性をもつことを $\mathrm{CR}(a)$ と書く.
- a について $\forall b_1, b_2\ (b_1 \leftarrow a \to b_2 \Rightarrow b_1 \downarrow b_2)$ が成り立つとき，a は局所合流性 (local confluence) をもつという．この性質は弱 **Church-Rosser** 性 (weak Church-Rosser property, 以後 WCR と略す) とも呼ばれる．そこで，a が局所合流性をもつことを $\mathrm{WCR}(a)$ と書く.

A の要素に関する性質 P について $\forall a \in A\ P(a)$ が成り立つとき，ARS $\mathcal{A} = (A, \to)$ は性質 P をもつといい，$P(\mathcal{A})$ と書く．このとき，関係 $\to$ が性質 P をもつともいう. $\square$

ARS の基本的性質の間に成り立つ関係がいくつか知られている．これを定理として次に示す．また，この関係を図 1 にまとめて示す．図中で，矢印は 2 つの性質の間の含意関係を表している.

定理 2.4 ARS の基本的性質の間の関係

任意の ARS $\mathcal{A}$ について，以下の含意関係が成立する.

(1) $\mathrm{SN}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathrm{WN}(\mathcal{A})$

(2) $\mathrm{CR}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathrm{WCR}(\mathcal{A})$

(3) $\mathrm{CR}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathrm{UN}(\mathcal{A})$

(4) $(\mathrm{SN} \land \mathrm{WCR})(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathrm{CR}(\mathcal{A})$

(5) $(\mathrm{WN} \land \mathrm{UN})(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathrm{CR}(\mathcal{A})$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{SN} \arrow[rr, "(1)"'] & & \mathrm{WN} \\
 & \mathrm{SN} \wedge \mathrm{WCR} \arrow[r, "(4)"] & \mathrm{CR} \arrow[dll, "(2)"] \arrow[d, "(3)"] & \mathrm{WN} \wedge \mathrm{UN} \arrow[l, "(5)"'] & \\
\mathrm{WCR} & & \mathrm{UN} & &
\end{tikzcd}
$$

図 1: ARS の基本的性質の関連図

□

定義 2.5 完備

ARS $\mathcal{A}$ について，$(\mathrm{SN}\wedge\mathrm{CR})(\mathcal{A})$ が成り立つとき，$\mathcal{A}$ は完備 (complete) であるといい，$(\mathrm{WN}\wedge\mathrm{CR})(\mathcal{A})$ が成り立つとき，$\mathcal{A}$ は半完備 (semi-complete) であるという． □

定理 2.4 (4) から，ARS は SN かつ WCR のとき，完備である．また，定理 2.4 (5) から，ARS は WN かつ UN のとき，半完備である．

2.2 項書換え系

次に，項の書き換えに関する性質を議論するための理論的枠組である，項書換え系を定義する．

定義 2.6 項

関数記号の集合を $\mathcal{F}$ とする．各関数記号 $f \in \mathcal{F}$ がとる引数の数は一定で，これを項数という．項数 0 の関数記号は特に定数と呼ばれる．また，加算無限個の変数の集合を $\mathcal{V}$ とする．ただし，$\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ が満たされているものとする．

$\mathcal{F}, \mathcal{V}$ 上の項の集合 $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を，次の 2 つの条件を満たす最小の集合として定義する．

(1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$

(2) $f \in \mathcal{F}$ の項数が n かつ $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ ならば $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$

$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ は，$\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ と略記することがある．また，項 t に現れる変数の集合を $\mathcal{V}(t)$ で表す． □

定義 2.7 項書換え系 (TRS)

項書換え系 (term rewriting system, 以後 TRS と略す) とは，関数記号の集合 $\mathcal{F}$ と，書換え規則の集合 $\mathcal{R}$ との対 $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ である．

書換え規則 (rewrite rule) は，次の 2 つの条件を満たす項の対 (l, r) であり，これを $l \to r$ と書く．

(1) $l \notin \mathcal{V}$

(2) $\mathcal{V}(r) \subseteq \mathcal{V}(l)$

前後関係から関数記号の集合が明らかな場合には，$\mathcal{F}$ を省略して $\mathcal{R}$ だけで TRS を表す． □

定義 2.8 文脈

$\mathcal{F}$ や $\mathcal{V}$ に属さない新しい定数 □ を導入する．文脈 (context) とは集合 $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$ に属する項である．文脈の集合を，$\mathcal{C}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ または $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ と略記する．

文脈 $C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に □ が n 個含まれているとする．これらを n 個の項 $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ で左から右へ順に置き換えてできる項を $C[t_1, \ldots, t_n]$ と表す．

$t = C[t_0]$ を満たす文脈 C が存在するとき，t_0 を t の部分項 (subterm) と呼ぶ． □

定義 2.9 代入

代入 (substitution) σ は，$\mathcal{V}$ から $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ への写像のうち，定義域 (domain) $\mathcal{D}(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \neq x\}$ が有限集合となるものをいう．代入 σ を書き表す場合，集合 $\{x \mapsto \sigma(x) \mid x \in \mathcal{D}(\sigma)\}$ が使える．

代入 σ は，次のようにして，$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ から $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ への写像 $[\sigma]$ に拡張できる．

$$[\sigma](t) = \begin{cases} \sigma(t) & (t \in \mathcal{V}) \\ f([\sigma](t_1), \ldots, [\sigma](t_n)) & (t = f(t_1, \ldots, t_n)) \end{cases}$$

$[\sigma](t)$ の略記として $t\sigma$ を使う．

拡張された代入を用いて，2 つの代入 σ_1, σ_2 の合成 $\sigma_1\sigma_2$ を，$(\sigma_1\sigma_2)(x) = [\sigma_2](\sigma_1(x))$ と定義する．

また，代入 σ の定義域を変数の集合 $V \subseteq \mathcal{V}$ に制限した代入 $\sigma|_V$ を，

$$\sigma|_V(x) = \begin{cases} \sigma(x) & (x \in V) \\ x & (x \notin V) \end{cases}$$

と定義する． □

定義 2.10 TRS における書換え

TRS $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ の書換え規則に基づいて，項の上の 2 項関係 $\to_{\mathcal{R}}$ を次のように定義する．

$$t \to_{\mathcal{R}} u \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{l} \exists\, l \to r \in \mathcal{R}\;\; \exists\, C \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}\;\; \exists\, \sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}_{\mathcal{F}} \\ (t = C[l\sigma] \;\wedge\; u = C[r\sigma]) \end{array}$$

この定義に現れる t の部分項 $l\sigma$ を可約項 (reducible expression，略して redex) と呼ぶ． □

$(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ を TRS とすると，$(\mathcal{T}_{\mathcal{F}}, \to_{\mathcal{R}})$ は ARS であるから，定理 2.4で述べた関係は任意の TRS に関しても成立する．

2.3 条件付き項書換え系

条件付き項書換え系は，書換え規則に条件部を付けることにより，条件を満たすときだけ書換えを行うように TRS を拡張したものである．

定義 2.11 条件付き項書換え系 (CTRS)

条件付き項書換え系 (conditional term rewriting system，以後 CTRS と略す) とは，関数記号の集合 $\mathcal{F}$ と，条件付き書換え規則の集合 $\mathcal{R}$ との対 $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ である．

条件付き書換え規則 (conditional rewrite rule) は，$l \to r \Leftarrow c$ の形をしている．TRS の書換え規則との違いは，条件部 (conditional part) c があることで，この部分は項の等式列 $p_1 = q_1, \ldots, p_n = q_n$ である．等式 $p = q$ が条件部 c に現れることを $p = q \in c$ と書く．l と r に現れる変数が満たすべき条件は，TRS の場

合 (定義 2.7) と同じである[1]．ただし，条件部には l にも r にも現れない変数が許される．これを外変数 (extra variable) と呼ぶ．なお，$n = 0$ のときの書換え規則は $l \to r$ と書く．つまり，条件部がない書換え規則だけからなる CTRS は，TRS と見なせる．

前後関係から関数記号の集合が明らかな場合には，$\mathcal{F}$ を省略して $\mathcal{R}$ だけで CTRS を表すこともある． □

定義 2.12 CTRS における書換え

CTRS $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ の書換え規則に基づいて，項の上の 2 項関係 $\to_{\mathcal{R}}$ を，次の式を満たす最小の関係として定義する[2]．

$$t \to_{\mathcal{R}} u \ \Leftrightarrow \ \begin{array}{l} \exists\ l \to r \Leftarrow c \in \mathcal{R}\ \ \exists C \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}\ \ \exists \sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}_{\mathcal{F}} \\ (t = C[l\sigma]\ \wedge\ u = C[r\sigma]\ \wedge\ c\sigma \downarrow_{\mathcal{R}}) \end{array}$$

ここで，$c\sigma \downarrow_{\mathcal{R}}$ は $\forall\, p = q \in c\ \ p\sigma \downarrow_{\mathcal{R}} q\sigma$ の略記である． □

TRS の場合と同様に，定理 2.4で述べた基本的性質の間の関係は任意の CTRS についても成り立つ．また，TRS は CTRS で書換え規則の条件部がない場合と等価であるから，任意の CTRS について成り立つ性質は，任意の TRS についても成り立つ．

定義 2.13 CTRS から TRS への変換

CTRS $\mathcal{R}$ に対して，TRS の書換え規則 $\mathcal{R}_n$ を，

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}_0 & = & \emptyset \\ \mathcal{R}_{n+1} & = & \{ l\sigma \to r\sigma \mid l \to r \Leftarrow c \in \mathcal{R}\ c\sigma \downarrow_{\mathcal{R}_n} \} \end{array}$$

のように定義する． □

次の命題は，この定義から直ちに導かれる．

命題 2.14 書換え規則 $\mathcal{R}_n$ の包含関係

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{R}_{n+1}$ □

次の定理は，文献 [5][7] による．

定理 2.15 書換えの等価性

$\mathcal{R}$ を CTRS とするとき $t \to_{\mathcal{R}} u \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ t \to_{\mathcal{R}_n} u$ が成立する． □

この定理により，CTRS $\mathcal{R}$ の性質を調べるには TRS $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ について考えればよいことがわかる．

定義 2.16 階層

書換え $t \to_{\mathcal{R}} u$ の階層 (level) とは $t \to_{\mathcal{R}_n} u$ を満たす最小の n である． □

以下の例では，$\mathcal{F}$ を明示せずに $\mathcal{R}$ だけを示して CTRS $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ を定義するが，この場合，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{R}$ の書換え規則に含まれる関数記号だけを要素としてもつものとする．

[1]CTRS の書換え規則に現れる変数が満たすべき条件には，いくつかの提案がある．文献 [12] の分類に従えば，本論文で定義された CTRS は，2-CTRS と呼ばれる．

[2]条件部の等号を解釈する方法にも，いくつかの提案がある．文献 [4] の分類によれば，本論文のように等号を関係 $\downarrow_{\mathcal{R}}$ によって解釈する CTRS は，join system と呼ばれる．

例 **2.17 CTRS における項の書換え**

次の CTRS を考える.

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{lcll} 0 > y & \to & \mathrm{F} & \\ \mathrm{S}(x) > 0 & \to & \mathrm{T} & \\ \mathrm{S}(x) > \mathrm{S}(y) & \to & x > y & \\ \max(x, y) & \to & x & \Leftarrow \; x > y = \mathrm{T} \\ \max(x, y) & \to & y & \Leftarrow \; x > y = \mathrm{F} \end{array} \right.$$

この CTRS では, 例えば, 次の書換えが可能である.

$$\begin{array}{lll} 0 > \mathrm{S}(0) & \to_{\mathcal{R}} & \mathrm{F} \\ \max(0, \mathrm{S}(0)) & \to_{\mathcal{R}} & \mathrm{S}(0) \\ \max(\max(0, \mathrm{S}(0)), 0) & \to_{\mathcal{R}} & \max(0, \mathrm{S}(0)) \end{array}$$

書換えの階層は, 上から順に 1, 2, 3 となっている. □

TRS にはない CTRS に特有な性質として, 次に定義する階層性がある.

定義 2.18 階層性

$\mathcal{R}$ を CTRS とし, P を CTRS の性質とする. 任意の階層 n について, $P(\mathcal{R}_n)$ が成立するとき, $\mathcal{R}$ は P に関して階層性 (level property) をもつという. また, $\mathcal{R}$ が P に関して階層性をもつことを $L\text{-}P(\mathcal{R})$ と表す.

例えば, $\forall n \in \mathbb{N}\ \mathrm{CR}(\mathcal{R}_n)$ が成り立つとき, $\mathcal{R}$ は合流性に関して階層性をもつ, あるいは, $\mathcal{R}$ は階層合流性をもつといい, $\text{L-CR}(\mathcal{R})$ と表す. □

3 階層性

CTRS の基本的性質の間に成り立つ関係を第 2 節で述べた. この節では, さらに, 各基本性質の階層性を考察の対象に加え, これらの性質の間に成立する関係を明らかにする.

この節で得られる結果を図 2にまとめて示す. この図は, 立方体の各面に CTRS の性質を配置し, 2 つの性質の間の関係を矢印によって表したものである. 実線の矢印は, 任意の CTRS $\mathcal{R}$ について含意関係 $P(\mathcal{R}) \Rightarrow Q(\mathcal{R})$ が成り立つことを示している. その否定, つまり, 成り立たないような $\mathcal{R}$ があることを示すのが破線の矢印である. 図 2の立方体の底面は, 図 1と同じものである. 底面の性質 P の階層性 $L\text{-}P$ をその真上にとることで, 図 1を上に向かって拡張している. つまり, 底面以外に書かれた矢印が, この節で新たに得られる含意関係である.

3.1 階層性の間の関係

はじめに, 図 2の底面にある 2 つの性質の間の関係が, 上面にある階層性に対してもそのまま成り立つことを示す.

定理 3.1

P, Q を CTRS の性質とする. 任意の ARS $\mathcal{A}$ について $P(\mathcal{A}) \Rightarrow Q(\mathcal{A})$ が成り立てば, 任意の CTRS $\mathcal{R}$ について $L\text{-}P(\mathcal{R}) \Rightarrow L\text{-}Q(\mathcal{R})$ が成り立つ.

証明

任意に選んだ CTRS $\mathcal{R}$ に関して $L\text{-}P(\mathcal{R})$ が成立するとき, 階層性の定義から, 全ての階層 n について $P(\mathcal{R}_n)$ が成り立つ. 定理の前提により, 全ての階層 n で $Q(\mathcal{R}_n)$ も満たされる. したがって, $L\text{-}Q(\mathcal{R})$ が成立する.

□

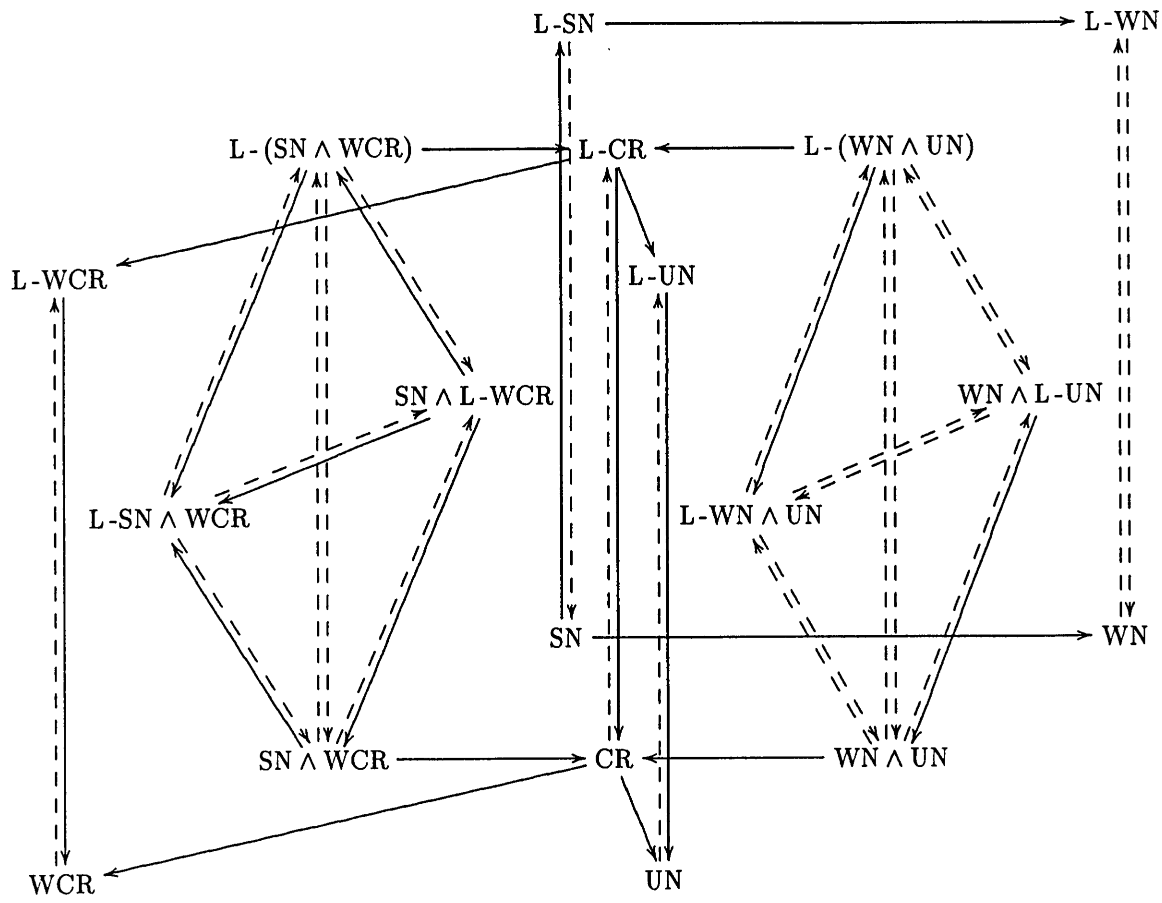


図 2: CTRS の性質の関連図

3.2　性質 P と階層性 L-P の関係

次に，CTRS の性質 P と，その階層性 L-P の間の関係について調べる．この関係は，図 2では，底面にある性質と上面にある性質とをつなぐ上下方向の矢印に相当する．

定理 3.2

任意の CTRS $\mathcal{R}$ について，以下の関係が成立する．

(1) $\mathrm{SN}(\mathcal{R}) \Rightarrow \text{L-SN}(\mathcal{R})$

(2) $\text{L-UN}(\mathcal{R}) \Rightarrow \mathrm{UN}(\mathcal{R})$

(3) $\text{L-CR}(\mathcal{R}) \Rightarrow \mathrm{CR}(\mathcal{R})$

(4) $\text{L-WCR}(\mathcal{R}) \Rightarrow \mathrm{WCR}(\mathcal{R})$

証明

(1) 背理法により証明を行う．はじめに，$\mathrm{SN}(\mathcal{R})$ と $\neg$ $\text{L-SN}(\mathcal{R})$ を仮定する．このとき，L-SN の定義から，ある階層 n について $\neg\mathrm{SN}(\mathcal{R}_n)$ が成立する．したがって，関係 $\rightarrow_{\mathcal{R}_n}$ による無限の書換え列が存在する．定理 2.15により，$\rightarrow_{\mathcal{R}}$ による無限の書換え列を作ることができる．これは $\mathrm{SN}(\mathcal{R})$ に矛盾する．

(2) $u_1 \leftarrow^*_{\mathcal{R}} t \rightarrow^*_{\mathcal{R}} u_2$ かつ，u_1, u_2 が正規形となる CTRS の簡約を考える．次に示す (3) の証明と同様に，最大の階層での書換えを考え，L-UN($\mathcal{R}$) を利用して，$u_1 = u_2$ を導く．

(3) 任意の項 t と，$u_1 \leftarrow^*_{\mathcal{R}} t \rightarrow^*_{\mathcal{R}} u_2$ を満たす任意の項 u_1, u_2 を考える．CR($\mathcal{R}$) を示すためには，$u_1 \downarrow_{\mathcal{R}} u_2$ を証明すればよい．$\rightarrow^*_{\mathcal{R}}$ は，$\rightarrow_{\mathcal{R}}$ による有限回の書換えであるから，各書換えの階層の中には最大値が存在する．そこで，最大の階層を n とすると，命題 2.14から，$u_1 \leftarrow^*_{\mathcal{R}_n} t \rightarrow^*_{\mathcal{R}_n} u_2$ が導かれる．前提の L-CR($\mathcal{R}$) により，任意の階層での書換えは CR であるから，$u_1 \downarrow_{\mathcal{R}_n} u_2$ が成り立つ．定理 2.15から，$u_1 \downarrow_{\mathcal{R}} u_2$ を導くことができる．

(4) $u_1 \leftarrow_{\mathcal{R}} t \rightarrow_{\mathcal{R}} u_2$ となる CTRS の簡約を考える．(3) と同様に，最大の階層での書換えを考え，L-WCR($\mathcal{R}$) を利用して，$u_1 \downarrow_{\mathcal{R}} u_2$ を導く．

□

続いて，CTRS の性質とその階層性の間に含意関係が成立しない例を示す．

例 3.3 含意関係が成立しない例 (1)

次に挙げる 5 つの関係は，全ての CTRS $\mathcal{R}$ について成立するとは限らない．

- UN($\mathcal{R}$) ⇒ L-UN($\mathcal{R}$)
- CR($\mathcal{R}$) ⇒ L-CR($\mathcal{R}$)
- WCR($\mathcal{R}$) ⇒ L-WCR($\mathcal{R}$)
- (SN∧WCR)($\mathcal{R}$) ⇒ L-(SN∧WCR)($\mathcal{R}$)
- (WN∧UN)($\mathcal{R}$) ⇒ L-(WN∧UN)($\mathcal{R}$)

実際，次の CTRS が，その反例となっている．

$$\mathcal{R} = \begin{cases} a & \rightarrow & b \\ a & \rightarrow & c \\ b & \rightarrow & c & \Leftarrow & a = b \end{cases}$$

書換え $a \rightarrow_{\mathcal{R}} b$, $a \rightarrow_{\mathcal{R}} c$ の階層は 1，書換え $b \rightarrow_{\mathcal{R}} c$ の階層は 2 である． □

例 3.4 含意関係が成立しない例 (2)

次に挙げる 4 つの関係は，全ての CTRS $\mathcal{R}$ について成立するとは限らない．

- L-SN($\mathcal{R}$) ⇒ SN($\mathcal{R}$)
- L-WN($\mathcal{R}$) ⇒ WN($\mathcal{R}$)
- L-(SN∧WCR)($\mathcal{R}$) ⇒ (SN∧WCR)($\mathcal{R}$)
- L-(WN∧UN)($\mathcal{R}$) ⇒ (WN∧UN)($\mathcal{R}$)

上の 4 つの関係に対する反例として，次の CTRS を考える．

$$\mathcal{R} = \{\ f(x) \rightarrow f(g(x)) \ \Leftarrow\ f(a) = f(x)\ \}$$

この CTRS には，次のような，無限の長さの簡約が存在する．

$$f(a) \rightarrow_{\mathcal{R}_1} f(g(a)) \rightarrow_{\mathcal{R}_2} f(g(g(a))) \rightarrow_{\mathcal{R}_3} \cdots$$

これは，1 つ書換えが進むごとに階層が 1 ずつ増える簡約となっている． □

例 3.5 含意関係が成立しない例 (3)

関係 WN($\mathcal{R}$) ⇒ L-WN($\mathcal{R}$) は全ての CTRS $\mathcal{R}$ について成立するとは限らない．次の CTRS が，その反例となっている．

$$\mathcal{R} = \begin{cases} a & \to & b \\ b & \to & a \\ b & \to & c \quad \Leftarrow \quad a = b \end{cases}$$

階層 1 は，$a \to_{\mathcal{R}} b$, $b \to_{\mathcal{R}} a$ という循環的な書換えであり，正規形が存在しない．しかし，階層 2 では，この書換えに加えて $b \to_{\mathcal{R}} c$ が成立するので，正規形が存在する． □

3.3 その他の関係

ここでは，完備性の階層性や半完備性の階層性に関して，まだ議論の済んでいない含意関係について述べる．つまり，図 2で左右の両側面に残る矢印に関する議論をここで行う．これらの関係は全て，第 3.2 節の結果から容易に導かれる．

以下に，含意関係が成立する場合 (図 2で，関係が実線の矢印で結ばれている場合) を挙げる．これらの関係は定理 3.2の (1) ~ (5) より導かれるが，どれを用いて証明できるかを各行の終わりに示す．

定理 3.6

任意の CTRS $\mathcal{R}$ に関して，次の関係が成立する．

SN, L-SN, WCR, L-WCR についての関係：

- (SN∧WCR)($\mathcal{R}$) ⇒ (L-SN∧WCR)($\mathcal{R}$) (1)
- (SN∧L-WCR)($\mathcal{R}$) ⇒ L-(SN∧WCR)($\mathcal{R}$) (1)
- (SN∧L-WCR)($\mathcal{R}$) ⇒ (SN∧WCR)($\mathcal{R}$) (4)
- L-(SN∧WCR)($\mathcal{R}$) ⇒ (L-SN∧WCR)($\mathcal{R}$) (4)
- (SN∧L-WCR)($\mathcal{R}$) ⇒ (L-SN∧WCR)($\mathcal{R}$) (1), (4)

WN, L-WN, UN, L-UN についての関係：

- (WN∧L-UN)($\mathcal{R}$) ⇒ (WN∧UN)($\mathcal{R}$) (2)
- L-(WN∧UN)($\mathcal{R}$) ⇒ (L-WN∧UN)($\mathcal{R}$) (2)

□

含意の関係が成立しない例については，第 3.2 節で示した 3 つの例がそのまま利用できる．以下に，含意の関係が成立しない場合 (図 2で，関係が破線の矢印で結ばれている場合) を挙げ，それぞれ，どの CTRS が反例となるかを示す．

例 3.7 包含関係が成立しない例

以下に挙げる関係は，全ての CTRS $\mathcal{R}$ について成立するとは限らない．

SN, L-SN, WCR, L-WCR についての関係：

- (L-SN∧WCR)($\mathcal{R}$) ⇒ (SN∧WCR)($\mathcal{R}$) (例 3.4)
- L-(SN∧WCR)($\mathcal{R}$) ⇒ (SN∧L-WCR)($\mathcal{R}$) (例 3.4)

- $(\mathrm{SN} \wedge \mathrm{WCR})(\mathcal{R}) \not\Rightarrow (\mathrm{SN} \wedge \text{L-WCR})(\mathcal{R})$ (例 3.3)
- $(\text{L-SN} \wedge \mathrm{WCR})(\mathcal{R}) \not\Rightarrow \text{L-}(\mathrm{SN} \wedge \mathrm{WCR})(\mathcal{R})$ (例 3.3)
- $(\text{L-SN} \wedge \mathrm{WCR})(\mathcal{R}) \not\Rightarrow (\mathrm{SN} \wedge \text{L-WCR})(\mathcal{R})$ (例 3.3)

WN, L-WN, UN, L-UN についての関係：

- $(\mathrm{WN} \wedge \mathrm{UN})(\mathcal{R}) \not\Rightarrow (\text{L-WN} \wedge \mathrm{UN})(\mathcal{R})$ (例 3.5)
- $(\text{L-WN} \wedge \mathrm{UN})(\mathcal{R}) \not\Rightarrow (\mathrm{WN} \wedge \mathrm{UN})(\mathcal{R})$ (例 3.4)
- $(\mathrm{WN} \wedge \text{L-UN})(\mathcal{R}) \not\Rightarrow \text{L-}(\mathrm{WN} \wedge \mathrm{UN})(\mathcal{R})$ (例 3.5)
- $\text{L-}(\mathrm{WN} \wedge \mathrm{UN})(\mathcal{R}) \not\Rightarrow (\mathrm{WN} \wedge \text{L-UN})(\mathcal{R})$ (例 3.4)
- $(\mathrm{WN} \wedge \mathrm{UN})(\mathcal{R}) \not\Rightarrow (\mathrm{WN} \wedge \text{L-UN})(\mathcal{R})$ (例 3.3)
- $(\text{L-WN} \wedge \mathrm{UN})(\mathcal{R}) \not\Rightarrow \text{L-}(\mathrm{WN} \wedge \mathrm{UN})(\mathcal{R})$ (例 3.3)
- $(\text{L-WN} \wedge \mathrm{UN})(\mathcal{R}) \not\Rightarrow (\mathrm{WN} \wedge \text{L-UN})(\mathcal{R})$ (例 3.4)
- $(\mathrm{WN} \wedge \text{L-UN})(\mathcal{R}) \not\Rightarrow (\text{L-WN} \wedge \mathrm{UN})(\mathcal{R})$ (例 3.5)

□

3.4 階層合流性の位置付け

この節の議論により，CTRS の性質の中での階層合流性の位置づけが明らかになった．図 2からわかるように，階層合流性 L-CR は，それよりも強い 3 つの性質 L-(SN∧WCR), SN∧L-WCR, L-(WN∧UN) から，それぞれ導ける．

4 階層合流性のモジュラ性

(C)TRS で，ある性質がモジュラ性であるとは，関数記号を共有しないように書換え規則を分割・統合してもこの性質が保存されることをいう．この節では，階層合流性が CTRS のモジュラ性であることを証明する．

4.1 直和とモジュラ性

はじめに，(C)TRS の直和とモジュラ性を定義し，合流性に関してすでに知られているモジュラ性について述べる．

定義 4.1 直和

$(\mathcal{F},\mathcal{R}),(\mathcal{G},\mathcal{S})$ を (C)TRS とする．$\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ が互いに素な集合のとき (共通の関数記号がないとき)，2 つの (C)TRS $(\mathcal{F},\mathcal{R}),(\mathcal{G},\mathcal{S})$ は互いに素 (disjoint) であるという．このとき，$\mathcal{R}$ と $\mathcal{S}$ も互いに素な集合となる．

$(\mathcal{F},\mathcal{R}),(\mathcal{G},\mathcal{S})$ を互いに素な (C)TRS とする．このとき，2 つの (C)TRS $(\mathcal{F},\mathcal{R}),(\mathcal{G},\mathcal{S})$ の直和 (disjoint union) を $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}, \mathcal{R} \oplus \mathcal{S})$ により定義する．ただし，記号 $\oplus$ は集合の直和 (互いに素な集合の和) を表す． □

定義 4.2 モジュラ性

P を (C)TRS の性質とし，$(\mathcal{F},\mathcal{R}),(\mathcal{G},\mathcal{S})$ を互いに素な (C)TRS とする．この 2 つの (C)TRS とその直和との間に，

$$(\mathcal{F},\mathcal{R}) \text{ と } (\mathcal{G},\mathcal{S}) \text{ が共に性質 } P \text{ をもつ} \Leftrightarrow (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}, \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}) \text{ が性質 } P \text{ をもつ}$$

の関係が成り立つとき，性質 P は (C)TRS のモジュラ性 (modular property) であるという． □

合流性のモジュラ性は，この節で与える証明との関連が深い．そこで，合流性のモジュラ性に関してすでに知られている結果を，定理として次に示す．なお，合流性以外の性質に関するモジュラ性については，文献 [10] を参照されたい．

定理 4.3 合流性のモジュラ性

(1) 合流性は TRS のモジュラ性である．

(2) 合流性は CTRS のモジュラ性である．

□

(1) の証明は文献 [13] で，(2) の証明は文献 [10] で与えられている．この節では，これらの結果に加えて，階層合流性が CTRS のモジュラ性であることを証明する．

4.2 証明のための準備

モジュラ性を証明するための準備として，(C)TRS の直和に関する基礎的概念と，証明で使われる事実について述べる．なお，この節で定義される概念や記法は，文献 [9][10] に基づく．

定義 4.4

- 項の集合 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}}$ を $\mathcal{T}_\oplus$，文脈の集合 $\mathcal{C}_{\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}}$ を $\mathcal{C}_\oplus$ と表す．
- 項 $t \in \mathcal{T}_\oplus$ に対して $\mathrm{root}(t)$ を次のように定義する．

$$\mathrm{root}(t) = \begin{cases} t & (t \in \mathcal{V}) \\ f & (t = f(t_1, \ldots, t_n)) \end{cases}$$

- 項の集合 $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ の要素を $\mathcal{F}$ 項 ($\mathcal{F}$-term) と呼ぶ．また，$\mathrm{root}(t) \in \mathcal{F}$ を満たす項 t を上部 $\mathcal{F}$ 項 (top $\mathcal{F}$-term) と呼ぶ．$\mathcal{G}$ 項と上部 $\mathcal{G}$ 項も，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ を入れ替えて同様に定義する．
- $x \in \mathcal{D}(\sigma)$ を満たす全ての変数 x に対して，$\sigma(x)$ が $\mathcal{F}$ 項となる σ を $\mathcal{F}$ 代入 ($\mathcal{F}$-substitution) と呼び，$\sigma(x)$ が上部 $\mathcal{F}$ 項となる σ を上部 $\mathcal{F}$ 代入 (top $\mathcal{F}$-substitution) と呼ぶ．$\mathcal{G}$ 代入と上部 $\mathcal{G}$ 代入も同様に定義する．
- $t = C[t_1, \ldots, t_n]$ $(C \neq \Box)$ を満たす項 $t \in \mathcal{T}_\oplus$ を考える．文脈 C と項 $t_1, \ldots, t_n$ が，次の 2 つのうちのどちらかを満たすとき $t = C[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$ と書く．
  (1) $C \in \mathcal{C}_\mathcal{F}$ かつ $t_1, \ldots, t_n$ が上部 $\mathcal{G}$ 項
  (2) $C \in \mathcal{C}_\mathcal{G}$ かつ $t_1, \ldots, t_n$ が上部 $\mathcal{F}$ 項

  このとき $t_1, \ldots, t_n$ をそれぞれ t の主部分項 (principal subterm) と呼ぶ．さらにこの概念を拡張して，$t = C[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$，あるいは，$C = \Box$ かつ $t = t_1$ のときに $t = C\langle\!\langle t_1, \ldots, t_n \rangle\!\rangle$ と書く．
- 項 $t \in \mathcal{T}_\oplus$ に対して $\mathrm{rank}(t)$ を次のように定義する．

$$\mathrm{rank}(t) = \begin{cases} 1 & (t \in \mathcal{T}_\mathcal{F} \cup \mathcal{T}_\mathcal{G}) \\ 1 + \max\{\mathrm{rank}(t_i) \mid 1 \leq i \leq n\} & (t = C[\![t_1, \ldots, t_n]\!],\ n \geq 1) \end{cases}$$

- 項 $t \in \mathcal{T}_\oplus$ の特殊部分項 (special subterm) の集合 $\mathrm{S}(t)$ を次のように定義する．

$$\mathrm{S}(t) = \begin{cases} \{t\} & (\mathrm{rank}(t) = 1) \\ \{t\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{S}(t_i) & (t = C[\![t_1, \ldots, t_n]\!],\ n \geq 1) \end{cases}$$

□

$\mathcal{T}_\oplus$ に属する項は，関数記号が $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ のどちらの集合の要素であるかに着目すると，2 つの部分に分けることができる．

例 4.5 $\mathcal{T}_\oplus$ の項

関数記号の集合を $\mathcal{F} = \{F, G, A\}$，$\mathcal{G} = \{f, g, a\}$ とし，$t = F(F(g(g(A)), f(a, G(x))), G(x))$ とおく．これを木で表現したものを図 3に示す．このとき，$\mathrm{root}(t) = F$, $\mathrm{rank}(t) = 3$ であり，

$$t = F(F(\Box, \Box))), G(x))\ [\![g(g(A)),\ f(a, G(x))]\!]\,,$$

$$\mathrm{S}(t) = \{A,\ g(g(A)),\ G(x),\ f(a, G(x)),\ t\}$$

が成り立つ． □

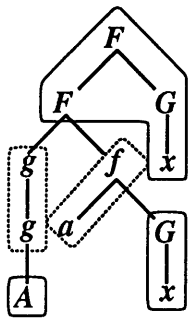


図 3: $\mathcal{T}_\oplus$ の項の木による表現

関数記号がどちらの集合の要素であるかに着目したとき，$\mathcal{T}_\oplus$ に属する項は層構造をなしていることがわかる．定義 4.4では，この層構造を扱うための概念を定義している．

次に，(C)TRS の直和での書換えに関わる基本的な概念を定義する．直和での書換えは，可約項の位置により 2 つに分類できる．

定義 4.6 内簡約，外簡約

$C[l\sigma] \to_\oplus C[r\sigma]$ を直和での書換えとする．可約項の書換え $l\sigma \to_\oplus r\sigma$ が主部分項の中で行われている ($l\sigma$ が $C[l\sigma]$ の主部分項の部分項) ならば，この書換えを内簡約 (inner reduction) と呼び，$C[l\sigma] \to^{i}_{\oplus} C[r\sigma]$ と表す．また，内簡約でない書換えを外簡約 (outer reduction) と呼び，$C[l\sigma] \to^{o}_{\oplus} C[r\sigma]$ と表す． □

直和における書換えは，項の層構造が保たれる場合と壊される場合に分けられる．

定義 4.7 破壊的書換え

直和における書換え $t \to_\oplus u$ が第 1 層で破壊的 (destructive at level 1) であるとは，$\mathrm{root}(t)$ と $\mathrm{root}(u)$ が属する関数記号の集合が異なるか，u が変数であることをいう．また，書換え $t \to_\oplus u$ が第 $n+1$ 層で破壊的

(destructive at level $n+1$) であるとは，$t = C[\![t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_m]\!] \to_\oplus C[t_1,\ldots u_j,\ldots,t_m] = u$，かつ，$t_j \to_\oplus u_j$ が第 n 層で破壊的であることをいう． □

定義 4.8 保存

- 項 t から始まる全ての書換え列に破壊的書換が含まれないとき，t は保存項 (preserved term) であるという．また，t の主部分項が全て保存項のとき，t は内保存項 (inner preserved term) であるという．
- $x \in \mathcal{D}(\sigma)$ を満たす全ての変数 x に対して，$\sigma(x)$ が保存項となる σ を保存代入 (preserved substitution) と呼び，$\sigma(x)$ が内保存項となる σ を内保存代入 (inner preserved substitution) と呼ぶ．

□

(内) 保存項を書換えて得られる項は，(内) 保存項である．また，内保存項の破壊的書換えは第 1 層で 1 回に限っておこり得る．

次に，直和での書換えの性質を述べる．

命題 4.9 内簡約と外簡約の性質

$\to_\oplus$ を直和での書換えとする．

(1) 次の関係が成立する．

$$t \to^i_\oplus u \Rightarrow \begin{array}{l} \exists\, C \in \mathcal{C}_\oplus\ \exists\, t_1,\ldots,t_n,u_j \in \mathcal{T}_\oplus\ \exists\, j \in \{1,\ldots,n\} \\ (t = C[\![t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_n]\!] \ \wedge\ u = C[t_1,\ldots,u_j,\ldots,t_n] \ \wedge\ t_j \to_\oplus u_j) \end{array}$$

もし，書換え $t \to^i_\oplus u$ が破壊的でないならば，$u = C[\![t_1,\ldots,u_j,\ldots,t_n]\!]$ と書ける．

(2) 次の関係が成立する．

$$t \to^o_\oplus u \Rightarrow \begin{array}{l} \exists\, C, C' \in \mathcal{C}_\oplus\ \exists\, t_1,\ldots,t_n \in \mathcal{T}_\oplus\ \exists\, i_1,\ldots,i_m \in \{1,\ldots,n\} \\ (t = C[\![t_1,\ldots,t_n]\!] \ \wedge\ u = C'\langle\!\langle t_{i_1},\ldots,t_{i_m}\rangle\!\rangle) \end{array}$$

もし，書換え $t \to^o_\oplus u$ が破壊的でないならば，$u = C'[\![t_{i_1},\ldots,t_{i_m}]\!]$ と書ける．

□

命題 4.10

$t \to_\oplus u \ \Rightarrow\ \mathrm{rank}(t) \geq \mathrm{rank}(u)$ □

次の定義と命題は，主部分項を他の項で置き換えるために使われる．

定義 4.11

項 $t_1,\ldots,t_n \in \mathcal{T}_\oplus$，$u_1,\ldots,u_n \in \mathcal{T}_\oplus$ について，関係 $\forall\, i,j \in \{1,\ldots,n\}\ (t_i = t_j \Rightarrow u_i = u_j)$ が成立することを，$\langle t_1,\ldots,t_n\rangle \propto \langle u_1,\ldots,u_n\rangle$ と表す． □

命題 4.12 主部分項の置換え

TRS の直和での外簡約は次の性質を持つ．

$$\begin{array}{l} C[\![t_1,\ldots,t_n]\!] \to^o_\oplus C'\langle\!\langle t_{i_1},\ldots,t_{i_m}\rangle\!\rangle \ \wedge\ \langle t_1,\ldots,t_n\rangle \propto \langle u_1,\ldots,u_n\rangle \\ \quad \Rightarrow \forall\, u_1,\ldots,u_n \in \mathcal{T}_\oplus\ C[u_1,\ldots,u_n] \to^o_\oplus C'[u_{i_1},\ldots,u_{i_m}] \end{array}$$

□

次に定義する代入は，直和で書換えを行う場合に適用する規則を片方の書換え系に制限するために使われる．

定義 4.13 代表代入

直和での書換え $\rightarrow_\oplus$ に関して，代入 τ が代入 σ の代表代入 (representative substitution) であるとは，次の 2 つの関係が成り立つことをいう．

(1) $\forall\, x, y \in \mathcal{D}(\sigma)\ (\sigma(x) \downarrow_\oplus \sigma(y) \ \Rightarrow\ \tau(x) = \tau(y))$

(2) $\forall\, x \in \mathcal{V}\ \sigma(x) \rightarrow^*_\oplus \tau(x)$

σ の代表代入を $\widehat{\sigma}$ と表す． □

命題 4.14 代表代入の存在

直和での書換え $\rightarrow_\oplus$ が合流性をもつとき，任意の代入 σ には，その代表代入 $\widehat{\sigma}$ が存在する．

証明

集合 $\{x\sigma \mid x \in \mathcal{D}(\sigma)\}$ を同値関係 $\leftrightarrow^*_\oplus$ によって分割した商集合を $\{C_1, \ldots, C_n\}$ とする． $\rightarrow_\oplus$ は合流性を持つから， $\leftrightarrow^*_\oplus \subseteq \downarrow_\oplus$ が成立する．したがって，同値類 C_i $(1 \leq i \leq n)$ に属する項を任意に 2 つ選ぶと，それらには公約項が存在する．この事実を繰り返し使うと，$\exists\, \widehat{t_i}\ \forall\, t \in C_i\ t \rightarrow^*_\oplus \widehat{t_i}$ が示せる．ただし，このとき， C_i が有限集合であるという事実を使っている．これは， $\mathcal{D}(\sigma)$ が有限であることから導かれる．

σ の定義域の任意の変数 x が $x \in C_i \Rightarrow \widehat{\sigma}(x) = \widehat{t_i}$ を満たすように $\widehat{\sigma}$ を定めれば，代入 $\widehat{\sigma}$ は σ の代表代入となる． □

次に，項の層構造が変化する簡約を定義する．破壊的書換えとの違いは，複数回の書換えによって層構造が変わる場合も許されることである．

定義 4.15 縮退簡約

簡約 $t \rightarrow^+_\oplus u$ が直和での書換え $\rightarrow_\oplus$ に関する縮退簡約 (collapsing reduction) であるとは，次の 2 つの条件を満たす文脈 C，項 u_0, $t_0 \in \mathrm{S}(t)$，簡約 $t_0 \rightarrow^+_\oplus u_0$ が存在することをいう．

(1) $t = C[t_0]$ かつ $u = C[u_0]$

(2) $\mathrm{root}(t_0)$ と $\mathrm{root}(u_0)$ が異なる関数記号の集合に属すか $u_0 \in \mathcal{V}$

$t \rightarrow^+_\oplus u$ が縮退簡約であることを， $t \rightarrow^c_\oplus u$ と表す．また，上の定義の t_0 を縮退可約項 (collapsing redex) と呼ぶ． □

命題 4.16 縮退簡約の性質

(1) $\rightarrow^c_\oplus \subseteq \rightarrow^+_\oplus$

(2) $t \in \mathcal{T}_\oplus$ は保存項である $\Leftrightarrow$ t には縮退可約項がない

(3) 縮退簡約は強正規化性をもつ

(4) 破壊的書換えは縮退簡約である

□

これらの性質を利用すると次の命題が証明できる．

命題 4.17 保存代入の存在

$\to_\oplus$ を直和での書換えとする．代入 $\sigma: \mathcal{V} \to \mathcal{T}_\oplus$ に対して，$\forall x \in \mathcal{V}\ \sigma(x) \to_\oplus^* \dot{\sigma}(x)$ を満たすような $\to_\oplus$ に関する保存代入 $\dot{\sigma}: \mathcal{V} \to \mathcal{T}_\oplus$ が存在する．

証明

$\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ と表せる．命題4.16 (3) から，$t_i\ (1 \leq i \leq n)$ は縮退簡約 $\to_\oplus^c$ に関する正規形 $\dot{t}_i$ をもつ．そこで，$\dot{\sigma} = \{x_1 \mapsto \dot{t}_1, \ldots, x_n \mapsto \dot{t}_n\}$ と定義すれば，命題4.16 (1) により $\forall x \in \mathcal{V}\sigma(x) \to_\oplus^* \dot{\sigma}(x)$ が得られる．また，命題4.16 (2) より，$\dot{\sigma}$ は $\to_\oplus$ に関する保存代入となる． □

次の命題とその証明は，文献 [10] による．

命題 4.18 代入の分解

任意の代入 $\sigma: \mathcal{V} \to \mathcal{T}_\oplus$ に対して，$\sigma = (\sigma_1\sigma_2)\lceil_{\mathcal{D}(\sigma_1)}$ を満たすような $\mathcal{F}$ ($\mathcal{G}$) 代入 σ_1 と，単射かつ上部 $\mathcal{G}$ ($\mathcal{F}$) 代入の σ_2 が存在する．

証明

この証明では，σ_1 が $\mathcal{F}$ 代入，σ_2 が上部 $\mathcal{G}$ 代入となる場合だけ示す．関数記号の集合を入れ替えた，σ_1 が $\mathcal{G}$ 代入，σ_2 が上部 $\mathcal{F}$ 代入の場合も同様に証明できる．

はじめに，全ての $x \in \mathcal{D}(\sigma)$ にわたって，$\sigma(x)$ の部分項のうち極大な上部 $\mathcal{G}$ 項であるものを集め，集合 $\{t_1, \ldots, t_n\}$ とする．次に，新変数 $y_1, \ldots, y_n$ を導入し，$\sigma_2 = \{y_i \mapsto t_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ と定義する．さらに，$x \in \mathcal{D}(\sigma)$ に対して $\sigma_1(x)$ を以下のように定義する．

(1) $\sigma(x)$ が上部 $\mathcal{G}$ 項のとき，$\sigma(x) = t_i$ を満たす添字 $i \in \{1, \ldots, n\}$ が存在する．そこで，$\sigma_1(x) = y_i$ と定義する．

(2) $\sigma(x)$ が $\mathcal{F}$ 項のとき，$\sigma_1(x) = \sigma(x)$ と定める．

(3) その他の場合，$\sigma(x) = C[\![t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}]\!]$，となるような添字 $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ が存在する．そこで，$\sigma_1(x) = C[y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}]$ と定める．

以上のように σ_1 と σ_2 を定めると，σ_1 は $\mathcal{F}$ 代入，σ_2 は単射かつ上部 $\mathcal{G}$ 代入となる．σ_2 で新変数が導入されることもあるので，一般には $\sigma \neq \sigma_1\sigma_2$ であり，等号を成立させるためには，合成代入 $\sigma_1\sigma_2$ の定義域を $\mathcal{D}(\sigma_1)$ へ制限する必要がある． □

この命題では，関数記号の集合の種類が違う場合を括弧内に示したが，以後はこれを省略する．

4.3 書換え系に関する記法

CTRS の階層性とモジュラ性を論じる場合，(1) CTRS から TRS への変換，(2) 2 つの CTRS からの直和の合成，の 2 つの操作により得られる様々な (C)TRS を扱う必要がある．以下に，それらを整理し，記法を定める．

階層合流性のモジュラ性を議論するための基礎になる 2 つの CTRS は，$\mathcal{R}$ と $\mathcal{S}$ である．

$$\begin{array}{lll} \text{CTRS} & \mathcal{R} & \cdots \quad (\mathcal{F}, \mathcal{R}) \\ \text{CTRS} & \mathcal{S} & \cdots \quad (\mathcal{G}, \mathcal{S}) \end{array}$$

$\mathcal{R}$ と $\mathcal{S}$ の直和が CTRS $\mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ であり，さらに，それと等価な TRS $(\mathcal{R} \oplus \mathcal{S})_n$ への変換が可能である．

$$\begin{array}{lll} \text{CTRS} & \mathcal{R} \oplus \mathcal{S} & \cdots \quad (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}, \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}) \\ \text{TRS} & (\mathcal{R} \oplus \mathcal{S})_n & \cdots \quad (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}, (\mathcal{R} \oplus \mathcal{S})_n) \end{array}$$

一方，$\mathcal{R},\mathcal{S}$ をそれぞれ等価な TRS $\mathcal{R}_n,\mathcal{S}_n$ に変換した後にそれらの直和をとると，$\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n$ になる．

$$\begin{array}{llcc} \text{TRS} & \mathcal{R}_n & \cdots & (\mathcal{F},\mathcal{R}_n) \\ \text{TRS} & \mathcal{S}_n & \cdots & (\mathcal{G},\mathcal{S}_n) \\ \text{TRS} & \mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n & \cdots & (\mathcal{F}\oplus\mathcal{G},\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n) \end{array}$$

4.4 階層合流性のモジュラ性

この節では，階層合流性が CTRS のモジュラ性であることを証明する．ここで与える証明の構造は，合流性が CTRS のモジュラ性であることを示した，文献 [10] の証明に基づいている．

命題 4.19

$\mathcal{R},\mathcal{S}$ が互いに素な CTRS であるとき，次の関係が成立する．

$$\text{L-CR}(\mathcal{R})\wedge\text{L-CR}(\mathcal{S})\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}\ \text{CR}(\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n)$$

証明

階層合流性の定義と，TRS に関する合流性のモジュラ性 (定理 4.3 (1)) による． □

次の命題で用いる記号 $\to_{\mathcal{R}_n^{\oplus}}$ は，TRS $(\mathcal{F}\oplus\mathcal{G},\mathcal{R}_n)$ での書換えを表す．ここで，$(\mathcal{F}\oplus\mathcal{G},\mathcal{R}_n)$ とは，TRS $(\mathcal{F}\oplus\mathcal{G},\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n)$ における書換えのうち，適用する書換え規則を $\mathcal{R}_n$ だけに制限したものである．記号 $\to_{\mathcal{S}_n^{\oplus}}$ も同様に定義する．

命題 4.20

$(\mathcal{F},\mathcal{R}),(\mathcal{G},\mathcal{S})$ は，互いに素で共に階層合流性をもつ CTRS であるとする．t,t' が $\mathcal{F}$ 項，σ,σ' が上部 $\mathcal{G}$ 代入かつ $\to_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}$ に関する保存代入のとき，次の関係が成立する．

$$t\sigma\to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}t'\sigma'\Rightarrow t\widehat{\sigma}\to^*_{\mathcal{R}_n^{\oplus}}t'\widehat{\sigma'}$$

証明

簡約 $t\sigma\to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}t'\sigma'$ の長さ l に関する帰納法で証明する．

- $l=0$ のとき，$t=t'$ かつ $\sigma=\sigma'$ であるから，$\widehat{\sigma}=\widehat{\sigma'}$ が成り立つ．したがって，$t\widehat{\sigma}\to^*_{\mathcal{R}_n^{\oplus}}t'\widehat{\sigma'}$ が得られる．
- $l\geq 1$ のとき，$\mathcal{V}(t)\cap\mathcal{D}(\sigma)=\{x_1,\ldots,x_n\}$ とおくと，t は $\mathcal{F}$ 項，σ は上部 $\mathcal{G}$ 代入であるから，$t\sigma=C\langle\langle x_1\sigma,\ldots,x_n\sigma\rangle\rangle$ と書ける．簡約 $t\sigma\to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}t'\sigma'$ の最初の書換えにより，(1) $x_1\sigma,\ldots,x_n\sigma$ のどれかが書き換わる場合，(2) そうでない場合，の 2 つに分けて $t\widehat{\sigma}\to^*_{\mathcal{R}_n^{\oplus}}t'\widehat{\sigma'}$ を示す．
  (1) 最初の書換えでは，ある添字 $j\in\{1,\ldots,n\}$ に対して，$x_j\sigma\to_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}s$ を満たす項 s が存在して，

  $$C\langle\langle x_1\sigma,\ldots,x_j\sigma,\ldots,x_n\sigma\rangle\rangle\to C\langle\langle x_1\sigma,\ldots,s,\ldots,x_n\sigma\rangle\rangle$$

  が成り立つ．ただし，$\to$ は $\to^i_{\mathcal{R}_n^{\oplus}},\to^i_{\mathcal{S}_n^{\oplus}},\to^o_{\mathcal{S}_n^{\oplus}}$ のいずれかの書換えである．新しい変数 y を導入して，代入 σ_1 を $\sigma_1=\sigma\{y\mapsto s\}$ と定義すると，$x_j\sigma=x_j\sigma_1\to_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}y\sigma_1=s$ が成り立つ．示すべき命題の前提と命題 4.19 より TRS $\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n$ は合流性をもつから，命題 4.14 より σ,σ_1 の代表代入 $\widehat{\sigma},\widehat{\sigma_1}$ が存在して $x_j\widehat{\sigma}=x_j\widehat{\sigma_1}=y\widehat{\sigma_1}$ が成立する．ここで，$t_1=C[x_1,\ldots,y,\ldots,x_n]$ とおけば，

  $$t\widehat{\sigma}=C\langle\langle x_1\widehat{\sigma},\ldots,x_j\widehat{\sigma},\ldots,x_n\widehat{\sigma}\rangle\rangle=C\langle\langle x_1\widehat{\sigma_1},\ldots,y\widehat{\sigma_1},\ldots,x_n\widehat{\sigma_1}\rangle\rangle=t_1\widehat{\sigma_1}$$

が得られる．したがって，$t\sigma \to^*_{\mathcal{R}^\oplus_n} t_1\widehat{\sigma_1}$ が成り立つ．次に，帰納法の仮定が残りの簡約 $t_1\sigma_1 \to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} t'\sigma'$ に適用できることを確かめる．$\mathcal{F}$ 項 t の中の 1 つの変数を別の変数に置き替えたものが t_1 であるから，これも $\mathcal{F}$ 項である．σ は上部 $\mathcal{G}$ 代入かつ $\to_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}$ に関する保存代入であるから，$x_j\sigma$ の書換えで得られた $y\sigma_1$ は上部 $\mathcal{G}$ 項の保存項となる．よって，σ_1 も上部 $\mathcal{G}$ 代入かつ $\to_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}$ に関する保存代入である．残りの簡約に対して帰納法の仮定を適用すると $t_1\widehat{\sigma_1} \to^*_{\mathcal{R}^\oplus_n} t'\widehat{\sigma'}$ が得られるから，$t\widehat{\sigma} \to^*_{\mathcal{R}^\oplus_n} t'\widehat{\sigma'}$ が成り立つ．

(2) 簡約 $t\sigma \to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} t'\sigma'$ の最初の書換えは，

$$C[\![x_1\sigma,\ldots,x_n\sigma]\!] \to^o_{\mathcal{R}^\oplus_n} C'\langle\!\langle x_{i_1}\sigma,\ldots,x_{i_m}\sigma\rangle\!\rangle$$

と表せる．TRS $\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n$ の合流性と命題 4.14 より，σ の代表代入 $\widehat{\sigma}$ が存在する．また，代表代入の定義から，$\langle x_1\sigma,\ldots,x_n\sigma\rangle \propto \langle x_1\widehat{\sigma},\ldots,x_n\widehat{\sigma}\rangle$ が成立する．命題 4.12 により，主部分項を置き換えると，

$$t\sigma = C[\![x_1\widehat{\sigma},\ldots,x_n\widehat{\sigma}]\!] \to^o_{\mathcal{R}^\oplus_n} C'\langle\!\langle x_{i_1}\widehat{\sigma},\ldots,x_{i_m}\widehat{\sigma}\rangle\!\rangle = t_1\widehat{\sigma}$$

となる．ただし，$t_1 = C[x_{i_1},\ldots,x_{i_m}]$ とおいた．t_1 は $\mathcal{F}$ 項だから帰納法の仮定 $t_1\widehat{\sigma} \to^*_{\mathcal{R}^\oplus_n} t'\widehat{\sigma'}$ により $t\widehat{\sigma} \to^*_{\mathcal{R}^\oplus_n} t'\widehat{\sigma'}$ が得られる．

□

命題 4.21

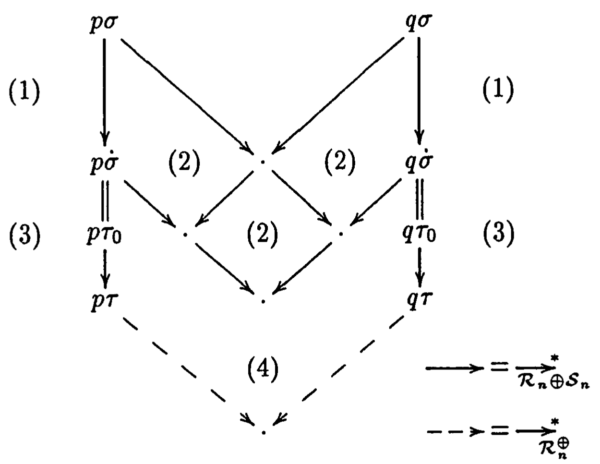
$(\mathcal{F},\mathcal{R}),(\mathcal{G},\mathcal{S})$ は，互いに素で共に階層合流性をもつ CTRS であるとする．$p,q \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$，$\sigma:\mathcal{V}\to\mathcal{T}_\oplus$ に対して $p\sigma \downarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} q\sigma$ が成り立つならば，

$$p\tau \downarrow_{\mathcal{R}^\oplus_n} q\tau \ \wedge\ \forall x\in\mathcal{V}\ \sigma(x) \to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} \tau(x)$$

を満たす代入 $\tau:\mathcal{V}\to\mathcal{T}_\oplus$ が存在する．

証明

次に示す図に従って，$p\tau \downarrow_{\mathcal{R}^\oplus_n} q\tau$ を証明する．



(1) 命題 4.17 から，$p\sigma \to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} p\dot{\sigma}$，$q\sigma \to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} q\dot{\sigma}$ を満たすような，$\to_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}$ に関する保存代入 $\dot{\sigma}$ が存在する．(2) 命題の前提と命題 4.19 から得られる $\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n$ の合流性を，上の図に従って繰り返し利用することにより，$p\dot{\sigma} \downarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} q\dot{\sigma}$ が導ける．(3) 命題 4.18 により代入 $\dot{\sigma}$ を分解すると，$\mathcal{F}$ 代入 σ_1 と単射かつ上部 $\mathcal{G}$ 代入の σ_2 が得られる．図中の τ_0 は代入 $(\sigma_1\sigma_2)\restriction_{\mathcal{D}(\sigma_1)}$ を表す．(4) $\dot{\sigma}$ は，$\to_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}$ に関する保存代入

であるから，σ_2 も $\to_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}$ に関する保存代入となる．命題4.20により，$p(\sigma_1\widehat{\sigma_2})\restriction_{\mathcal{D}(\sigma_1)} \downarrow_{\mathcal{R}_n^{\oplus}} q(\sigma_1\widehat{\sigma_2})\restriction_{\mathcal{D}(\sigma_1)}$ が成り立つ．つまり，$\tau = (\sigma_1\widehat{\sigma_2})\restriction_{\mathcal{D}(\sigma_1)}$ とすればよい．

一方，$\forall x \in \mathcal{V}\ \sigma(x) \to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} \dot{\sigma}(x) = (\sigma_1\sigma_2)\restriction_{\mathcal{D}(\sigma_1)}(x)$ と，$\forall x \in \mathcal{V}\ \sigma_2(x) \to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} \widehat{\sigma_2}(x)$ の 2 つを用いて，$\forall x \in \mathcal{V}\ \sigma(x) \to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} (\sigma_1\widehat{\sigma_2})\restriction_{\mathcal{D}(\sigma_1)}(x) = \tau(x)$ を得る． □

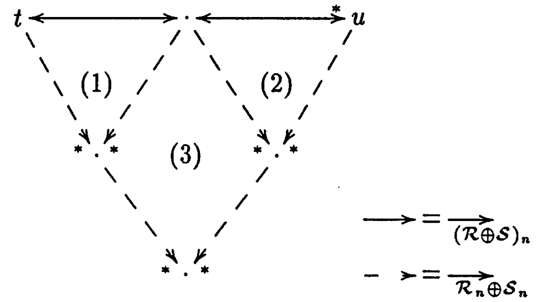
命題 4.22

互いに素な CTRS $(\mathcal{F},\mathcal{R}),(\mathcal{G},\mathcal{S})$ が共に階層合流性をもつとき，$\leftrightarrow^*_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} \subseteq \downarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}$ が成立する．

証明

階層 n に関する帰納法で証明する．

- $n=0$ のとき，$(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_0 = \mathcal{R}_0\oplus\mathcal{S}_0 = \varnothing$ であるから，命題は成立する．
- $n \geq 1$ のとき，$t \leftrightarrow^*_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} u\ (t,u\in\mathcal{T}_{\oplus})$ の長さ l に関する帰納法で $t \downarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} u$ を示す．
  (1) $l=0$ のとき，$t=u$ であるから，$t \downarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} u$ が成り立つ．
  (2) $l \geq 1$ の場合は，次に示す図に従って $t \downarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} u$ を得る．



ただし，図中の (1) は以下に証明する包含関係 $\leftrightarrow_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} \subseteq \downarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}$，(2) は長さ l に関する帰納法の仮定，(3) は命題の前提と命題4.19から得られる，$\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n$ の合流性である．

(1) の証明に移る．関係 $\downarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}$ は対称性をもつから，$\to_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} \subseteq \downarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}$ だけを示せば十分である．そこで，$t \to_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} u'$ を満たす任意の $u' \in \mathcal{T}_{\oplus}$ について考える．定義から，TRS $(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n$ の書換え規則 $l \to r$，文脈 C，代入 σ が存在して，$t = C[l\sigma], u' = C[r\sigma]$ が成り立つ．さらに，定義から次の関係が満たされる．

$$\exists\, l_0 \to r_0 \Leftarrow c_0 \in \mathcal{R}\oplus\mathcal{S}\ \ \exists\, \sigma_0 : \mathcal{V} \to \mathcal{T}_{\oplus}$$
$$(l = l_0\sigma_0 \in \mathcal{T}_{\oplus}\ \wedge\ r = r_0\sigma_0 \in \mathcal{T}_{\oplus}\ \wedge\ c_0\sigma_0 \downarrow_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_{n-1}})$$

このとき，c_0 の中から任意に選んだ等式 $p_0 = q_0$ について $p_0\sigma_0 \leftrightarrow^*_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_{n-1}} q_0\sigma_0$ が成り立つから，階層 n に関する帰納法の仮定 $\leftrightarrow^*_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_{n-1}} \subseteq \downarrow_{\mathcal{R}_{n-1}\oplus\mathcal{S}_{n-1}}$ により $p_0\sigma_0 \downarrow_{\mathcal{R}_{n-1}\oplus\mathcal{S}_{n-1}} q_0\sigma_0$ が得られる．ここで，CTRS の書換え規則 $l_0 \to r_0 \Leftarrow c_0 \in \mathcal{R}\oplus\mathcal{S}$ が $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ のどちらの規則であるかの場合分けにより，$t \downarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} u'$ を証明する．$\mathcal{R},\mathcal{S}$ は，共に任意に選ばれた CTRS であるから，$\mathcal{R}$ の場合についてだけ考えれば十分である．このとき，命題4.21から，

$$p_0\tau \downarrow_{\mathcal{R}_{n-1}^{\oplus}} q_0\tau\ \wedge\ \forall\, x \in \mathcal{V}\ \sigma_0(x) \to^*_{\mathcal{R}_{n-1}\oplus\mathcal{S}_{n-1}} \tau(x)$$

を満たす代入 τ が存在する．$p_0\tau \downarrow_{\mathcal{R}_{n-1}^{\oplus}} q_0\tau$ により書換え規則の条件部が満たされるので，$l_0\tau \to r_0\tau$ は TRS $(\mathcal{F}\oplus\mathcal{G},\mathcal{R}_n)$ の書換え規則となり，書換え $C[l_0\tau\sigma] \to_{\mathcal{R}_n^{\oplus}} C[r_0\tau\sigma]$ を得る．$\mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n$ だから，$C[l_0\tau\sigma] \to_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} C[r_0\tau\sigma]$ も成り立つ．一方，$\forall\, x \in \mathcal{V}\ \sigma_0(x) \to^*_{\mathcal{R}_{n-1}\oplus\mathcal{S}_{n-1}}$

$\tau(x)$ からは，$C[l_0\sigma_0\sigma] \to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} C[l_0\tau\sigma]$ と，$C[r_0\sigma_0\sigma] \to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} C[r_0\tau\sigma]$ が得られる．以上の結果を合わせると，次の簡約を得る．

$$t = C[l_0\sigma_0\sigma] \to^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} C[l_0\tau\sigma] \to_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} C[r_0\tau\sigma] \leftarrow^*_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} C[r_0\sigma_0\sigma] = u'$$

つまり，$t \downarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} u'$ が導かれた．

□

命題 4.23

互いに素な CTRS $(\mathcal{F},\mathcal{R}),(\mathcal{G},\mathcal{S})$ について，包含関係 $\to_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} \subseteq \to_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n}$ が成立する．

証明

命題は，$\mathcal{R}_n \oplus \mathcal{S}_n \subseteq (\mathcal{R} \oplus \mathcal{S})_n$ から直ちに導かれるので，この包含関係を階層 n に関する帰納法で証明する．

- $n = 0$ のとき，$\mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{S}_0 = (\mathcal{R} \oplus \mathcal{S})_0 = \emptyset$ であるから，示すべき包含関係は成立している．
- $n \geq 1$ のとき，$l \to r \in \mathcal{R}_n \oplus \mathcal{S}_n$ とすると，$l \to r$ は，$\mathcal{R}_n$ か $\mathcal{S}_n$ のどちらかの書換え規則である．まず，$l \to r \in \mathcal{R}_n$ の場合について考える．定義より，$l = l_0\sigma \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$，$r = r_0\sigma \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$，$c_0\sigma \downarrow_{\mathcal{R}_{n-1}}$ を満たすような，$\mathcal{R}$ の書換え規則 $l_0 \to r_0 \Leftarrow c_0$ と代入 σ が存在する．$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ より，この書換え規則は $\mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ の書換え規則でもある．また，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ より，l と r は共に $\mathcal{T}_\oplus$ の項でもある．さらに，$\mathcal{R}_{n-1} \subseteq \mathcal{R}_{n-1} \oplus \mathcal{S}_{n-1}$ と帰納法の仮定から，$c_0\sigma \downarrow_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_{n-1}}$ を得る．よって，$l \to r \in (\mathcal{R} \oplus \mathcal{S})_n$ が成り立つ．同様にして，$l \to r \in \mathcal{S}_n$ の場合にも，$l \to r \in (\mathcal{R} \oplus \mathcal{S})_n$ が示せる．

□

系 4.24

互いに素な CTRS $(\mathcal{F},\mathcal{R}),(\mathcal{G},\mathcal{S})$ について包含関係 $\to_{\mathcal{R}_n} \subseteq \to_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n}$ が成立する． □

命題 4.25

CTRS $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}, \mathcal{R} \oplus \mathcal{S})$ が階層合流性をもつとき，$t, u \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$ に対して $t \to_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} u$ が成り立つならば $t \to_{\mathcal{R}_n} u$．

証明

書換え $t \to_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} u$ を満たす任意の $t, u \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$ について考える．定義から，TRS $(\mathcal{R} \oplus \mathcal{S})_n$ の書換え規則 $l \to r$，文脈 C，代入 σ が存在して，$t = C[l\sigma] \in \mathcal{T}_\mathcal{F}, u' = C[r\sigma] \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$ が成り立つ．再び，定義から

$$\exists\, l_0 \to r_0 \Leftarrow c_0 \in \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}\ \exists\, \sigma_0 : \mathcal{V} \to \mathcal{T}_\oplus$$
$$(l = l_0\sigma_0 \in \mathcal{T}_\mathcal{F}\ \land\ r = r_0\sigma_0 \in \mathcal{T}_\mathcal{F}\ \land\ c_0\sigma_0 \downarrow_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_{n-1}})$$

を得る．$l_0 \in \mathcal{T}_\mathcal{F}, r_0 \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$ であるから，書換え規則 $l_0 \to r_0 \Leftarrow c_0$ は $\mathcal{R}$ に属する．このとき，$l_0\sigma_0 = l_0\tau, r_0\sigma_0 = r_0\tau$ を満たす $\mathcal{F}$ 代入 τ が存在して，$p_0\tau \downarrow_{\mathcal{R}_{n-1}} q_0\tau$ が成り立つ．したがって，$t \to_{\mathcal{R}_n} u$． □

定理 4.26 階層合流性のモジュラ性

階層合流性は CTRS のモジュラ性である．

証明

モジュラ性の定義 (定義 4.2) に従い，次の関係が成立することを証明する．

$$\text{L-CR}(\mathcal{R}) \land \text{L-CR}(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \text{L-CR}(\mathcal{R} \oplus \mathcal{S})$$

$\Rightarrow$

L-CR($\mathcal{R}$) $\wedge$ L-CR($\mathcal{S}$) を仮定し，任意の階層 n について $(\mathcal{R} \oplus \mathcal{S})_n$ が合流性をもつことを示す．そこで，任意に選んだ階層 n について，$u_1 \leftarrow^*_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} t \rightarrow^*_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} u_2$ を満たすような任意の項 $t, u_1, u_2 \in \mathcal{T}_\oplus$ を考える．このとき，$u_1 \leftrightarrow^*_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} u_2$ が成り立つ．命題 4.22により包含関係 $\leftrightarrow^*_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} \subseteq \downarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n}$ が成立するので，$u_1 \downarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} u_2$ が導かれる．最後に命題 4.23，つまり，$\rightarrow_{\mathcal{R}_n\oplus\mathcal{S}_n} \subseteq \rightarrow_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n}$ から $u_1 \downarrow_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} u_2$ を得る．

$\Leftarrow$

L-CR($\mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$) を仮定し，全ての階層 n に関して $\mathcal{R}_n$ と $\mathcal{S}_n$ が共に合流性を持つことを示す．ここでは，$\mathcal{R}_n$ だけについて合流性を示すが，$\mathcal{S}_n$ についても同様に証明できる．まず，任意に選んだ階層 n について，$u_1 \leftarrow^*_{\mathcal{R}_n} t \rightarrow^*_{\mathcal{R}_n} u_2$ を満たす任意の項 $t, u_1, u_2 \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$ を考える．系 4.24から，包含関係 $\rightarrow_{\mathcal{R}_n} \subseteq \rightarrow_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n}$ が成り立つので，$u_1 \leftarrow^*_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} t \rightarrow^*_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} u_2$ が成立する．$(\mathcal{R} \oplus \mathcal{S})_n$ は合流性をもつから，$u_1 \downarrow_{(\mathcal{R}\oplus\mathcal{S})_n} u_2$ が導ける．最後に，命題 4.25を利用して $u_1 \downarrow_{\mathcal{R}_n} u_2$ を得る． □

階層合流性が CTRS のモジュラ性であることが証明された．これにより，CTRS $\mathcal{R}$ が階層合流性をもつことを示す場合，$\mathcal{R}$ を互いに素な集合 $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ に分割して，各 $\mathcal{R}_i$ について L-CR($\mathcal{R}_i$) を証明する，という手法が使える．また，階層合流性をもつことがわかっている互いに素な CTRS を合わせて，階層合流性をもつ CTRS をつくることができる．

5　おわりに

本論文で得られた結果は，次の 2 つに要約できる．

(1) CTRS の基本的性質やそれらの階層性に着目し，各性質間の含意関係を明らかにした．

(2) 階層合流性が CTRS のモジュラ性であることを証明した．

これにより，CTRS の各性質の中での階層合流性の位置付けが明らかになり，さらに，CTRS の階層合流性を証明するためのいくつかの手法が得られた．

最後に，今後の研究課題として，本論文で得られた結果の拡張について考える．文献 [3] では，強正規化性と書換え関係の決定可能性を同時に保証する CTRS の性質として減少性 (Decreasingness) を提案している．減少性を含めた CTRS の各性質の含意関係がどうなるかは興味深い問題である．また，本論文では，2 つの性質の間に含意関係が成立しない場合，その反例を挙げたが，前提条件をどこまで強めると含意関係が成立するかを調べることも重要である．モジュラ性の議論では，2 つの CTRS が互いに素であるという条件が必要であった．この条件を緩めて，関数記号の共有があっても性質が保存されるかどうかの検討も，課題のひとつである．さらに，プログラミング言語への応用の観点から，階層合流性が保証されるような CTRS の構文的制限を研究することも重要である．

謝辞

この研究を進めるにあたり御指導いただいた，筑波大学教授の井田哲雄先生と筑波大学講師の Aart Middeldorp 先生に感謝致します．特に Middeldorp 先生には，証明にあたり親身なご指導をいただきました．また，論文の校正の際に協力していただいた筑波大学工学研究科の中原鉱一氏と中川康二氏に感謝致します．

参考文献

[1] Bergstra, J. and Klop, J.: Conditional Rewrite Rules: Confluence and Termination, *Journal of Computer and System Science*, Vol. 32(1986), pp. 323–362.

[2] Dershowitz, N. and Jouannaud, J.-P.: Rewrite Systems, *Handbook of Theoretical Computer Science*(van Leeuwen, J.(ed.)), Vol. B, The MIT Press, 1990, chapter 6, pp. 243–320.

[3] Dershowitz, N., Okada, M., and Sivakumar, G.: Confluence of Conditional Rewrite Systems, *Proceedings of the 1st International Workshop on Conditional Term Rewriting Systems*, Orsay, 1987. Lectuer Notes in Computer Science 308, pp. 31-44.

[4] Dershowitz, N., Okada, M., and Sivakumar, G.: Canonical Conditional Rewrite Systems, *Proceedings of the 9th International Conference on Automated Deduction*, Argonne, 1988. Lecture Notes in Computer Science 310, pp. 538-549.

[5] Giovannetti, E. and Moiso, C.: A completeness result for E-unification algorithms based on conditional narrowing, *Proceedings of the Workshop on Foundation of Logic and Functional Programming*, Trento, 1986. Lecture Notes in Computer Science 306, pp. 157-167.

[6] Hanus, M.: The Integration of Functions into Logic Programming: A Survey, Technical Report MPI-I-94-201, MPI, 1994. To appear in the Journal of Logic Programming.

[7] Kaplan, S.: Conditional Rewrite Rules, *Theoretical Computer Science*, Vol. 33,No. 2(1984), pp. 175–193.

[8] Klop, J.: Term Rewriting Systems, *Handbook of Logic in Computer Science*(S. Abramsky, D. Gabbay, T. M.(ed.)), Vol. 2, Oxford University Press, 1992, chapter 1, pp. 1–116.

[9] Klop, J., Middeldorp, A., Toyama, Y., and de Vrijer, R.: Modularity of Confluence: A Simplified Proof, *Information Processing Letters*, (1994). To appear.

[10] Middeldorp, A.: *Modular Properties of Term Rewriting Systems*, PhD Thesis, Vrije Universiteit, Amsterdam, 1990.

[11] Middeldorp, A.: Modular Properties of Conditional Term Rewriting Systems, *Information and Computation*, Vol. 104,No. 1(1993), pp. 110–158.

[12] Middeldorp, A. and Hamoen, E.: Completeness Results for Basic Narrowing, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, (1994). To appear.

[13] Toyama, Y.: On the Curch-Rosser Property for the Direct Sum of Term Rewriting Systems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 34,No. 1(1987), pp. 128–143.