

ISE

ISE-TR-93-101

非負実数階第1種ベッセル関数の零点計算アルゴリズム

菊池 靖, 浅井 信吉, 宮崎 佳典,
蔡 東生, 藤代 一成, 池邊 八洲彦

INSTITUTE
OF
INFORMATION SCIENCES AND ELECTRONICS
UNIVERSITY OF TSUKUBA

非負実数階第 1 種ベッセル関数の零点計算アルゴリズム

菊池 靖* 浅井 信吉** 宮崎 佳典** 蔡 東生** 藤代 一成† 池辺 八洲彦**
* 会津大学コンピュータ理工学部 ** 筑波大学電子・情報工学系
† お茶の水女子大学理学部

Matrix Algorithm for the Computation of Zeros of Nonnegative Order Bessel Functions

Yasushi Kikuchi* Nobuyoshi Asai** Yoshinori Miyazaki**

DongSheng Cai** Issei Fujishiro† Yasuhiko Ikebe**

* School of Computer Science and Engineering, University of Aizu

** Institute of Information Science and Electronics, University of Tsukuba

† Faculty of Science, Ochanomizu University

Abstract. Consider the problem of computing a given number N of the smallest positive zeros $j_{\nu,1}, \dots, j_{\nu,N}$ of Bessel function $J_{\nu}(z)$ of a given nonnegative order ν with a given relative accuracy $\varepsilon > 0$. In this paper, we describe how to implement our matrix algorithm developed earlier for this purpose for the case $0 \leq \nu \leq 30$, $\varepsilon \geq 10^{-24}$ and $N \leq 15$. The algorithm can be extended to the case where ν is negative. However, if ν is close to a negative integer then the problem turns out to be ill-conditioned.

1 序論

任意の実数 ν , 正数 ε , 自然数 N が与えられたとき, ベッセル関数 $J_{\nu}(z)$ の第 1 象限中の原点に近い N 個の零点を, 相対誤差 ε 以下で計算する問題を考える. ただし, 本論文では $\nu \geq 0$ の場合に限る, すなわち, 実数 $\nu \geq 0$, $\varepsilon > 0$, 自然数 N が与えられたとき, ベッセル関数 $J_{\nu}(z)$ の原点に最も近い N 個の正の零点 $0 < j_{\nu,1} < \dots < j_{\nu,N}$ を, 相対誤差 ε 以下で計算する問題を扱う. $\nu \geq 0$ に限定する理由は, 第 2 節に述べる.

本論文では, 最初の問題に対する一つの解法として, すでに公表されている行列算法 [4][5] の実装を述べる.

上に述べた問題の $\nu \geq 0$ の場合に対して, 以下に述べる解法が知られている. Temme[8] は, 高次ニュートン法によるアルゴリズムと, ALGOL60 によるプログラムを与えている. これによると, 零点は以下の手続きで計算される. $j_{\nu,k}$ の近似値を計算するとき, i 番目の近似値を z_i とすると, 反復公式は,

$$z_{i+1} = z_i - r(z_i) \frac{1 + pr(z_i)}{1 + qr(z_i)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

である。ここに,

$$p = \frac{1 + 4z_i^2 - 4\nu^2}{6z_i(2\nu + 1)}, \quad q = \frac{2z_i^2 - 1 - 6\nu - 8\nu^2}{3z_i(2\nu + 1)}, \quad r(z_i) = J_\nu(z_i)/J_{\nu+1}(z_i).$$

出発値 z_1 は, $k \geq 3\nu - 8$ の場合は, McMahan の式として知られている漸近展開 [1, p.371, 9.5.12] [9, p.506] を用い, $k < 3\nu - 8$ の場合は, Olver の手続き [1, p.371, 9.5.22–9.5.26] [6] を用い, 計算される. また, この論文中の ALGOL プログラムは, 与えられた $\nu \geq 0, N \geq 1, \varepsilon >$ (計算機の演算精度) に対して, $j_{\nu,1}, \dots, j_{\nu,N}$ を相対誤差 ε 以下で計算する.

上記問題の直接の解ではないが, Branders[2] は, $\nu = 0, 1, 2, \dots, 10, 1 \leq k \leq 100$ に限定した場合の, $j_{\nu,k}$ に対する分数関数近似式と, これによる近似値の最大絶対誤差が最小になるときの係数の表を公表している. この式による最大絶対誤差は, 10^{-9} である. また, ν が表中にない値をとる場合, この式によって零点を計算することはできない.

ここで, 本論文の, 次節以下の構成を述べる. 第 2 節では, 行列算法の基礎理論を述べる. 第 3 節では, アルゴリズム実装に際して問題となる, 行列の最適次元 n_{min} 決定について述べる. 第 4 節で, 計算の手続きを述べる. 第 5 節で, 結論を述べる.

2 基礎理論

この節では, 行列算法の理論的基礎を述べる. この行列算法とは, 零点計算を l^2 内のコンパクト行列作用素の固有値問題に再定式化し, この行列の有限次元主座小行列の固有値より, 近似零点を計算する方法である [4][5]. その出発点は, 次の定理である [5].

定理 1. 実数 $\nu \neq -1, -2, \dots$ が与えられたとする. $n = 1, 2, \dots$ に対して, $\{\lambda_n\}$ を, 以下で定義される n 次複素対称三重対角行列 A_n の, 適当な固有値の列かつ λ_n が $n \rightarrow \infty$ で, ある値 λ に収束するとき, $\lambda = 4/z^2$ を満たす複素数 (実数を含む) z は, $J_\nu(z) = 0$ を満たす. このとき, $\lambda_n = 4/z_n^2$ かつ $z_n \rightarrow z$ ($n \rightarrow \infty$) を満たす z_n を, z の近似とする.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_n = \begin{pmatrix} d_1 & f_2 & & & 0 \\ f_2 & d_2 & f_3 & & \\ & f_3 & d_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & f_n \\ 0 & & & f_n & d_n \end{pmatrix}, \\ d_k = \frac{2}{(\alpha_k - 1)(\alpha_k + 1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ f_k = \frac{1}{(\alpha_k - 1)\sqrt{\alpha_k - 2}\sqrt{\alpha_k}}, \quad k = 2, 3, \dots, n \\ \alpha_k = \nu + 2k, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

ただしここに、平方根は $a < 0$ ならば、 $\sqrt{a} = i\sqrt{|a|}$ を意味することとする。この近似値の相対誤差 $(z_n - z)/z$ は次の式で評価される。

$$(2) \quad \frac{z_n - z}{z} = \frac{J_{\nu+2n}(z)J_{\nu+2n+2}(z)}{2J_{\nu+1}^2(z)(\nu+2n+1)}(1 + o(1)), (n \rightarrow \infty, z \text{ 固定})$$

$\nu < -2$ のとき、 p を $|\nu|/2$ より大きい最小の自然数とすると、 f_p を除く A_n の全ての成分は実数であり、 f_p は、純虚数となる：

$$f_p = \frac{1}{(\nu + 2p - 1) \cdot i \cdot \sqrt{(\nu + 2p - 2)(\nu + 2p)}}$$

従って $\nu < -2$ の場合、 A_n は複素行列となる。この時、 A_n は非対角成分の組 (f_p, f_p) (ただし括弧内の最初の項は優対角成分、2番目の項は劣対角成分を表す) を $(|f_p|, -|f_p|)$ に置き換えた行列 \tilde{A}_n と相似であることが知られている [5]。 \tilde{A}_n の固有値は、例えば EISPACK [7] 中の、上ヘッセンベルグ行列の全ての固有値を計算する QR アルゴリズムサブルーチン HQR を用いて計算される。

$\nu \geq 0$ に制限したとき、次のことがいえる [4][5]： A_n は実対称三重対角行列である； A_n は正定値である； A_n の絶対値の大きい方から k 番目の固有値を $\lambda_n^{(k)}$ とすると、 $n \rightarrow \infty$ に対して $2/\sqrt{\lambda_n^{(k)}} \rightarrow j_{\nu,k}$ が成り立つ、すなわち、 $2/\sqrt{\lambda_n^{(k)}}$ を $j_{\nu,k}$ の近似とするのが適当である。

n 次実三重対角行列 A_n の全ての固有値は、QR アルゴリズムで効率的に計算される。例えば、我々は EISPACK [7] 中の IMTQL1 (実対称三重対角行列の全ての固有値を計算する QR アルゴリズムサブルーチン)、を用いている。これより、我々の行列算法は QR アルゴリズムの一つの応用であるといえる。

また、 $\nu \geq 0$ の場合定理 1. にしたがって計算された近似零点の相対誤差に関して、以下のことが知られている [4][5]。

1. ν, n を固定したとき、原点に近い近似零点ほど相対誤差が小さい。
2. ν, k を固定したとき、 $j_{\nu,k}$ の近似値は n を大きくとればいくらかでも相対誤差を小さくできる。
3. n, k を固定したとき、 ν が小さいほど $j_{\nu,k}$ の近似値の相対誤差は小さい。

以上より、以下の条件を満たす行列 A_n の最小次元、 $n_{min} = n_{min}(\nu, N, \varepsilon)$ の存在が保証される [5]： $n \geq n_{min}$ を満たす全ての n に対して、 n 次行列 A_n の固有値より計算された $j_{\nu,1}, \dots, j_{\nu,N}$ の近似値の相対誤差が ε 以下であることが保証される。この n_{min} については、次節で述べる。

第 1 節に述べた先行研究と比較した、定理 1. に基づくアルゴリズムの特徴は、以下の通りである。

1. 近似根に対する精密な誤差評価式 (2) が知られている.
2. 先述の通り, 行列算法の, もっとも核心的部分である複素対称三重対角行列 A_n の固有値計算に, QR アルゴリズムパッケージサブルーチンを利用することにより, プログラム構造はきわめて簡単になる.
3. $\nu < -1$ ならば, $J_\nu(z)$ の無限個の零点のうちの $2[|\nu|]$ 個は複素数で, 残りは実数であること, $[|\nu|]$ が奇数である時, 複素数の零点のうちの 2 個は, 純虚数であることが Hurwitz の定理として知られている [9, p.403]. 定理 1. に与えた計算法は, 上記の相似変換を用いて複素数の零点も計算可能である [5]. 複素数の零点を計算のできるアルゴリズムは, 我々の調査の範囲内では他に見つからなかった.

行列算法の最大の特長は上記 3 であるしかし, ν が負の整数に極めて近い時, 零点計算問題は悪条件である. 以下, この事実について考察する.

ベッセル関数は, 見方を変えると ν と z との 2 変数関数と考えることができる. 本論文で考えている問題とは逆に, z を固定して $J_\nu(z) = 0$ を満たす ν を求める問題を考える. この問題に対して, 共著者 池辺, 浅井他の調査 [3] により以下の事実が最近証明されている.

定理 2. 任意の複素数 z が与えられているものとする. $n = 1, 2, \dots$ に対して, $\{\nu_n\}$ を, 以下で定義される n 次複素対称三重対角行列 T_n の, 適当な固有値の列かつ ν_n が $n \rightarrow \infty$ である値 ν に収束するものとするならば, ν は $J_\nu(z) = 0$ を満たす. 逆に, $J_\nu(z) = 0$ を満たす全ての ν に対して, $\nu_n \rightarrow \nu, n \rightarrow \infty$ なる T_n の固有値の列 $\{\nu_n\}$ が存在する. このとき, $\nu_n \rightarrow \nu$, をみたす ν_n を ν の近似とする.

$$(3) \quad T_n = \begin{pmatrix} -1 & z/2 & & & 0 \\ z/2 & -2 & z/2 & & \\ & z/2 & -3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & z/2 \\ 0 & & & z/2 & -n \end{pmatrix}$$

絶対誤差 $\nu_n - \nu$ は, 次式で評価される.

$$(4) \quad \nu_n - \nu = \frac{-(z/2)J_{\nu+n}(z)J_{\nu+n+1}(z)}{\sum_{k=1}^{\infty} J_{\nu+k}^2(z)}(1 + o(1))$$

z が実数ならば, T_n は実対称行列であり, ν, ν_n も必ず実数である.

この定理に基づいた数値計算の結果より, 実数 $z, -20 \leq z \leq 20$ に対して, $J_\nu(z) = 0$ を満たす ν (この場合必ず実数) を z の多価関数 $\nu(z)$ とみなし, $z-\nu$ 平面にプロットしたものを, 図 1 に示す. $\nu(z)$ は, $\nu(0) = \text{‘負の整数’}$ を通る z 軸に平行な直線に近い. すなわち, ν が

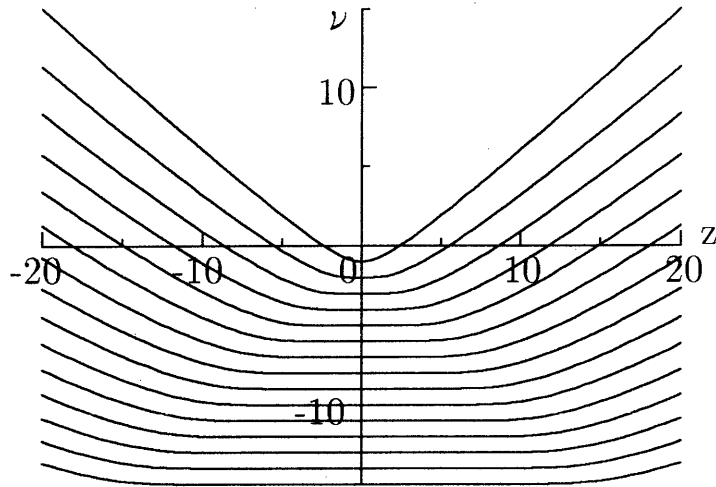


図 1. The many-valued real function $\nu(z)$ of a real variable z , defined by $J_\nu(z) = 0$.

負の整数に極めて近い場合は, $dz/d\nu$ が大きくなる. 従って, ν が負の整数に極端に近い場合は, 与えられた ν に対して $J_\nu(z) = 0$ を満たす z を求める問題は悪条件である. この場合には, 問題を定理 2. に従った, 与えられた z に対して $J_\nu(z) = 0$ を満たす ν を求める問題に変換すれば, 良条件になる. しかしこの場合の論議は, 本論文の目的の範囲を越えるものであり, 詳細は改めて別論文で報告する. 本論文では, 安定な $\nu \geq 0$ の場合のみを扱う.

3 n_{min} 決定

n_{min} の関数を誤差評価式 (2) より解析的に求めることは困難である. ゆえに, n_{min} は数値的に求めなければならない.

すなわち, ν, ε をパラメーターとし, n を変化させて, 相対誤差が ε 以下であるような近似零点の個数 N をまず数値的に決定しなければならない.

計算結果より, n 対 N の関係をグラフにプロットした典型的な例を, 図 2に掲げる. この他のケースも, ほぼ同じ傾向を示す.

図 2より, グラフは, わずかに下に凸のほぼ直線に近い曲線であり, またその曲率は, n が小さいほど大きくなる. グラフを直線と見たとき, その傾きはおよそ 0.6である. つまり, 大まかに言えば, n が十分大きいとき, ほぼ $0.6n$ 個の根が正しく計算されることになる.

この曲線を, 回帰曲線で近似することを考える. 安全サイドにくるように, つまり n_{min} を overestimate するように 1 次回帰近似すると, N が小さい範囲で n_{min} を大きく見積もりすぎ, 計算上の損が大きい. また, グラフに 2 次曲線回帰を行った結果, n_{min} の予測値と実測値の差が, 高々 2 程度の回帰曲線を得たが, 回帰曲線の各項の係数と ν, ε は簡単な関係にはない. したがって, プログラム中で回帰曲線を用いて n_{min} を決定するには, 各 ν, ε の値に対して, 定数, 1 次, 2 次の 3 項に対する係数をストアしておかなければならない. これ

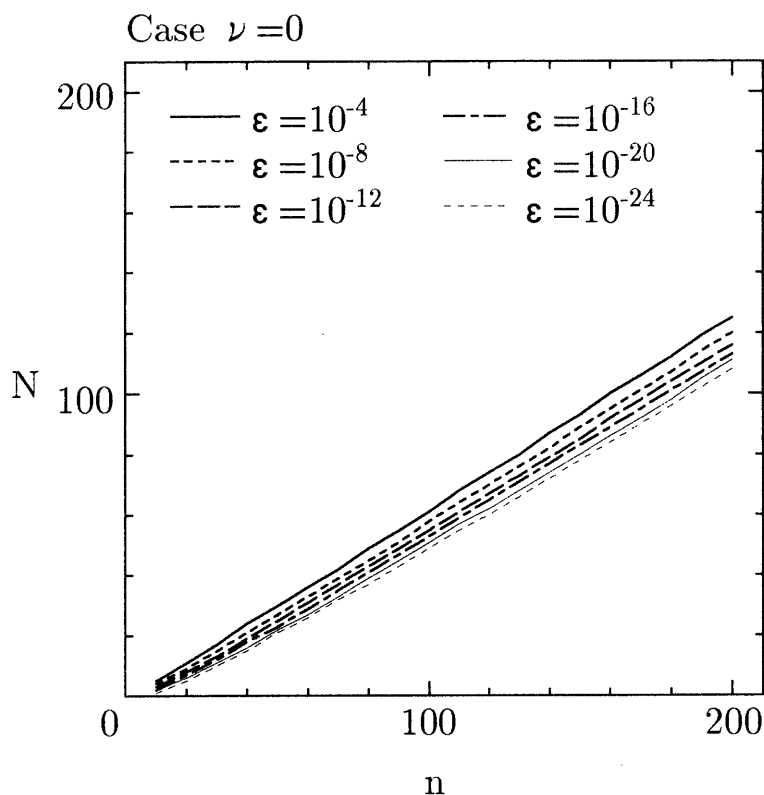


図 2. The N - n relation, where N denotes the number of approximate zeros of $J_0(z)$ having a given relative error ε or less ($\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-12}, 10^{-16}, 10^{-20}, 10^{-24}$), computed from the $n \times n$ matrix A_n .

に対して、 n_{min} の値を表の形でプログラム中にストアすることになると、各 ν, ε に対して、高々15個の値をストアすればよいことになる。このことより、回帰曲線を用いて n_{min} を求めることにしても、記憶領域の節約という観点からは、余り効果がないと判断される。

そこで、次節に述べる、零点の計算手続きとサンプルプログラムでは、 n_{min} の値を、表参照により求める。

上記の計算結果を、 N について整理して、 $\nu = 2, 4, 6, 8, 10, 20, 30, \varepsilon = 10^{-8}, 10^{-16}, 10^{-24}, n = 1, 2, \dots, 15$ に対する n_{min} の値を表の形にまとめたものが付録 A である。

例えば、 $j_{10,k}, k = 1, 2, \dots, 5$ を、相対誤差 10^{-16} 以下で計算したい場合は、 $\nu = 10$ の表の第5行第2列より、19を得る。すなわち、 $n_{min} = 19$ を採ればよい。また、 ν, ε が、中間の値の場合は、 ν の場合は与えられた ν より大きい最小の値、 ε の場合は与えられた ε より小さい最大の値を採用すれば、より安全な値を採ることとなる。例えば、 $\nu = 7.3, \varepsilon = 10^{-10}$ の場合は $\nu = 8, \varepsilon = 10^{-16}$ に対する n_{min} を採用すればよい。

表より、以下のようなことが読みとられる。まず、 ν, N が固定されたとき、 $\varepsilon = 10^{-8}$ と 10^{-16} 間、または 10^{-16} と 10^{-24} 間の n_{min} の差は2~6である。すなわち、行列の次元が増加すると、特定の近似根の相対誤差は、急速に小さくなる。また、 ν が変わっても n_{min} の値は余り変わらない、つまり、 n_{min} は ν 依存性が小さいといえる。

4 実装

近似零点は、次のプロセスより計算される。

1. ν, N, ε を与える
2. 表参照より $n_{min}(\nu, N, \varepsilon)$ の値を求める
3. 定理で定義された行列 $A_n, n = n_{min}$ の N 最大固有値, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N > 0$ を QR 法サブルーチン (第3節 参照) を用いて計算する
4. $j_{\nu,k}$ に対する近似根 $2/\sqrt{\lambda_k}$ を計算する ($k = 1, 2, \dots, N$).

この計算プロセスに基づいた簡単なサンプルプログラムを付録 B に与える。

5 結論

階数 $m \geq 0$ のベッセル関数 $J_m(z)$ の零点計算に対して、行列手法 [4][5] を実装した。この実装に対して問題となる行列の最小次元 n_{min} を決定するための、数値計算による参照表を作成し、これを利用したサンプルプログラムを与えた。

第2節で述べたように、 $\nu < 0$ の場合にも使えるルーチンを作成するために、 ν が負の整数に近い場合の零点の挙動を解析する必要がある。そのためには、定理 2. に与えた z が与えられたときの、 $J_\nu(z) = 0$ を満たす ν を求めるアルゴリズムに基づいた考察が必要である。これに関しては、共著者である池辺, 浅井他が別論文として発表する予定である。

参考文献

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.
- [2] Branders, M., Piessens, R. and de Meue, M., Rational Approximations for Zeros of Bessel Functions, *Journal of Computational Physics*, 42(1981), 403–405.
- [3] Ikebe, Y. and Asai, N., *private communications*.
- [4] Ikebe, Y., Kikuchi, Y. and Fujishiro, I., Computing Zeros and Orders of Bessel Functions, *J. Comp. Appl. Math.*, 38(1991), 169–184.
- [5] Ikebe, Y., Kikuchi, Y., Fujishiro, I., Asai, N., Takanashi, K. and Harada, M., The Eigenvalue Problem for Infinite Compact Complex Symmetric Matrices with Application to the Numerical Computation of Complex Zeros of $J_0(z) - iJ_1(z) = 0$ and of

Bessel Functions $J_m(z)$ of Any Real Order m , *Linear Algebra and its Applications*,
採録決定

- [6] Olver, F. W., The Asymptotic Expansion of Bessel Functions of Large Order, *Philis. Trans. Roy. Soc. London [A]*, 247(1954), 328–368.
- [7] Smith, B. T., Boyle, J. M., Dongarra, J. J., Garbow, B. S., Ikebe, Y., Klema, V. C. and Moler, C. B., *Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide, Second Edition*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [8] Temme, N. M., An Algorithm with ALGOL 60 Program for the Computation of the Zeros of Ordinary Bessel Functions and those of their Derivatives, *J. Comput. Phys.*, 32(1979), 270–279.
- [9] Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Second Edition*, Cambridge University Press, London, 1944.

付録 A

N	$-\log_{10} \varepsilon$		
	8	16	24
1	5	7	10
2	7	10	13
3	9	12	15
4	11	15	18
5	13	17	20
6	15	19	22
7	16	21	24
8	18	23	26
9	20	24	28
10	22	26	30
11	23	28	32
12	25	30	34
13	27	32	36
14	29	34	38
15	30	36	40

$\nu = 2$

N	$-\log_{10} \varepsilon$		
	8	16	24
1	5	8	11
2	8	11	14
3	10	13	16
4	12	15	19
5	13	17	21
6	15	19	23
7	17	21	25
8	19	23	27
9	21	25	29
10	22	27	31
11	24	29	33
12	26	31	35
13	27	33	37
14	29	35	39
15	31	36	41

$\nu = 4$

N	$-\log_{10} \varepsilon$		
	8	16	24
1	6	9	12
2	8	12	15
3	10	14	17
4	12	16	20
5	14	18	22
6	16	20	24
7	18	22	26
8	19	24	28
9	21	26	30
10	23	28	32
11	25	30	34
12	26	32	36
13	28	33	38
14	30	35	40
15	31	37	42

$\nu = 6$

N	$-\log_{10} \varepsilon$		
	8	16	24
1	6	10	13
2	9	12	16
3	11	15	18
4	13	17	20
5	15	19	23
6	16	21	25
7	18	23	27
8	20	25	29
9	22	27	31
10	23	29	33
11	25	30	35
12	27	32	37
13	29	34	39
14	30	36	40
15	32	38	42

$\nu = 8$

N	$-\log_{10} \varepsilon$		
	8	16	24
1	7	10	13
2	9	13	16
3	11	15	19
4	13	17	21
5	15	19	23
6	17	21	25
7	19	23	27
8	20	25	29
9	22	27	31
10	24	29	33
11	26	31	35
12	27	33	37
13	29	35	39
14	31	37	41
15	33	38	43

$\nu = 10$

N	$-\log_{10} \varepsilon$		
	8	16	24
1	8	12	15
2	10	14	18
3	12	17	20
4	14	19	23
5	16	21	25
6	18	23	27
7	20	25	29
8	22	27	31
9	23	29	33
10	25	31	35
11	27	32	37
12	29	34	39
13	30	36	41
14	32	38	43
15	34	40	45

$\nu = 15$

N	$-\log_{10} \varepsilon$		
	8	16	24
1	8	12	16
2	11	15	19
3	13	18	22
4	15	20	24
5	17	22	26
6	19	24	28
7	21	26	30
8	23	28	33
9	24	30	35
10	26	32	37
11	28	34	38
12	30	36	40
13	31	37	42
14	33	39	44
15	35	41	46

$\nu = 20$

N	$-\log_{10} \varepsilon$		
	8	16	24
1	9	13	17
2	11	16	20
3	14	19	23
4	16	21	25
5	18	23	27
6	20	25	30
7	22	27	32
8	23	29	34
9	25	31	36
10	27	33	38
11	29	35	40
12	31	37	42
13	32	39	44
14	34	40	46
15	36	42	48

$\nu = 25$

N	$-\log_{10} \varepsilon$		
	8	16	24
1	9	14	18
2	12	17	21
3	14	19	24
4	16	22	26
5	18	24	28
6	20	26	31
7	22	28	33
8	24	30	35
9	26	32	37
10	28	34	39
11	30	36	41
12	32	38	43
13	33	40	45
14	35	42	47
15	37	43	49

$\nu = 30$

表. $j_{\nu,k}$, $0 \leq k \leq 30$, $k = 1, 2, \dots, 15$ を相対誤差 $\varepsilon = 10^{-8}, 10^{-16}, 10^{-24}$ 以下で計算するための行列 A_n (本文中の定理で定義される) の最小次元 n_{min} の表

付録 B サンプルプログラム

以下に第 4 節に述べた計算プロセスに基づいた、簡単なサンプルプログラムを示す。

B.1 このプログラムの目的

このプログラムは、与えられた ν , ε , N に対して $j_{\nu,1}, \dots, j_{\nu,N}$ を相対誤差 ε 以下で計算して、配列変数に格納する。

B.2 変数リスト

N:	整数変数	指定された根の個数 $N > 0$	入力
NMAX:	整数変数	配列の宣言サイズ	入力
M:	実数変数	指定されたベッセル関数の階数 $\nu \geq 0$	入力
EPS:	実数変数	指定された相対精度 $\varepsilon > 0$	入力
NMIN:	整数変数	行列 A_n の必要最小次元 n_{min}	内部変数
D:	NMAX 次 実数配列	IMTQL1 の入力として、行列 A_n の 対角成分を $D(1) \cdots D(N)$ に格納する IMTQL1 の出力として、行列 A_n の 固有値を昇順に $D(1) \cdots D(N)$ に 格納する	内部変数
F:	NMAX 次 実数配列	IMTQL1 の入力として、行列 A_n の 非対角成分を $F(2) \cdots F(N)$ に格納する IMTQL1 は、この配列変数の値を破壊する	内部変数
Z:	NMAX 次 実数配列	$j_{\nu,1}, \dots, j_{\nu,N}$ の近似値を $Z(1) \cdots Z(N)$ に格納する	出力
IERR:	整数変数	IMTQL1 の返すエラーコード	

B.3 参照サブルーチン

- NMIN1: 表参照により n_{min} を与える整数型関数サブルーチン
IMTQL1: 実対称三重対角行列のすべての固有値を計算する EISPACK
[7] 中の QR アルゴリズムサブルーチン

B.4 Sample FORTRAN Program

```
INTEGER N,NMIN,NMIN1
REAL M, EPS, D(NMAX), F(NMAX), Z(NMAX)

C 表参照により、 $n_{min}$  を求める整数型関数サブルーチン NMIN1 を呼び出す
NMIN=NMIN1(M,N, EPS)
```

```

C   行列  $A_n$ ,  $n = n_{min}$  を作る
      D(1)=2./(M+1)/(M+3)
      DO 10 I=2,NMIN
          D(I)=2D0/(M+2*I-1)/(M+2*I+1)
          F(I)=1D0/(M+2*I-1)/SQRT((M+2*I)*(M+2*I-2))
10   CONTINUE

C   EISPACK の IMTQL1 を呼出し,  $A_n$  の全ての固有値を計算する
C   IMTQL1 は配列 D, F の内容を破壊する

      CALL IMTQL1(NMIN,D,F,IERR)

C   D(1)···D(N) には,  $A_n$  の固有値が小さい順に入っている
C    $j_{\nu,1}$ ··· $j_{\nu,N}$  の近似値を計算する

      DO 20 I=1,N
          Z(I)=2./SQRT(D(NMIN-I+1))
20   CONTINUE

C   Z(1)···Z(N) には,  $j_{\nu,1}, \dots, j_{\nu,N}$  の近似値が入っている
      ⋮

```

B.5 NMIN1 変数リスト

N:	整数変数	指定された根の個数 $N > 0$	入力
M:	実数変数	指定されたベッセル関数の階数 $\nu \geq 0$	入力
EPS:	実数変数	指定された相対精度 $\varepsilon > 0$	入力
NM:	3次元配列	n_{min} の表値 (付録 A 参照)	
		第一引数 (1-3) ε に対するインデックス変数	
		第二引数 (1-15) N に対するインデックス変数	
		第三引数 (1-9) ν に対するインデックス変数	

B.6 NMIN1 Sample Program

```

      INTEGER FUNCTION NMIN1(M,N,EPS)
C
      INTEGER N
      REAL*8 M, EPS
C
      REAL*8 E
      INTEGER*2 NM(3,15,9)
C
       $n_{min}$  の表データ
      DATA NM/data list

```

```

C      εを越えない最大のεの表参照値を定め、インデックス変数 J に格納する
      ⋮
      I=IDINT(-DLOG10(E)/8D0+1)
C      νより小さい最小のνの表参照値を定め、インデックス変数 J に格納する
      IF(M.LE.10) THEN
        J=INT(M/2)*2
        IF(J.LT.INT(M)) J=J+1
      ELSE
        J=INT(M/5)*5
        IF(J.LT.INT(M)) J=J+1
      ENDIF
C      index value I,J,N より配列を参照し、 $n_{min}$  の値を NMIN1 に格納する
      NMIN1=NM(I,N,J)
C      関数 サブルーチン NMIN1 は、 $n_{min}(\nu, \varepsilon, N)$  の値を返す
      RETURN
      END

```

INSTITUTE OF INFORMATION SCIENCES AND ELECTRONICS
UNIVERSITY OF TSUKUBA
TSUKUBA-SHI, IBARAKI 305 JAPAN

REPORT DOCUMENTATION PAGE	REPORT NUMBER ISE-TR-93-101
TITLE 非負実数階第1種ベッセル関数の零点計算アルゴリズム	
AUTHOR(S) 菊池 靖, 浅井 信吉, 宮崎 佳典, 蔡 東生, 藤代 一成, 池邊 八洲彦	
REPORT DATE 1993年3月12日	NUMBER OF PAGES 12
MAIN CATEGORY 数値解析	CR CATEGORIES
KEY WORDS ベッセル関数, 固有値問題, 零点計算	
ABSTRACT Consider the problem of computing a given number N of the smallest positive zeros $j_{\nu,1}, \dots, j_{\nu,N}$ of Bessel function $J_{\nu}(z)$ of a given nonnegative order ν with a given relative accuracy $\varepsilon > 0$. In this paper, we describe how to implement our matrix algorithm developed earlier for this purpose for the case $0 \leq \nu \leq 30$, $\varepsilon \geq 10^{-24}$ and $N \leq 15$. The algorithm can be extended to the case where ν is negative. However, if ν is close to a negative integer then the problem turns out to be ill-conditioned.	
SUPPLEMENTARY NOTES	